

علم الرياضيات

تأليف

زياودن ساردر

جيري رافتز

بورين فان لون

ترجمة

ممدوح عبد المنعم محمد

مراجعة وإشراف وتقديم

إمام عبد الفتاح إمام

Introducing... Mathematics

**& Ziauddin Sardar
Jerry Ravetz
Borin Van Loon**

أقدم لك... هذه السلسلة!

ليست أفكار الفلسفة هي وحدها الغامضة، بل هناك أيضاً كثرة كثيرة من الأفكار العلمية - في جميع العلوم تقريباً بلا استثناء - يصعب على القارئ غير المتخصص أن يستوعبها بسهولة، ومن ثم فهي تحتاج إلى شرح وإيضاح بالرسوم والصور فما هو الشعور واللا شعور؟ وما هو الفرق بين الذهن والمخ، وكيف نتعامل معهما. وما هي الوراثة والمورثات؟ وما الرياضيات، ولماذا كانت غامضة بالنسبة لمعظم الناس؟

كما أننا نحتاج إلى أن نعرف شيئاً عن كبار من العلماء بطريقة مبسطة - عن فرويد ويونج وكلاين ونيوتن وهوكنج الخ.

وإذا كانت الأعداد الستة الأولى من هذه السلسلة قد عرضت لمجموعة من الفلاسفة لاستجلاء غوامض أفكارهم عن طريق الرسوم، والصور، والأشكال التوضيحية، فأنا نفعّل الشيء نفسه بالنسبة للأفكار العلمية، عن الشعور، واللا شعور، والذهن، والمخ الخ. وغيرها من أفكار وإننا نأمل أن يجد فيها القارئ نفس المتعة السابقة.

المشروع القومي للترجمة

أقدم لك ...

علم الرياضيات

تأليف

زياودن ساردر

جيرى رافتز

بورين فان لون

ترجمة

ممدوح عبد المنعم

مراجعة وإشراف وتقديم

إمام عبد الفتاح إمام

المجلس الأعلى للثقافة

٢٠٠٢

رقم الإيداع بدار الكتب المصرية

٢٠٠٢/٤١٧١

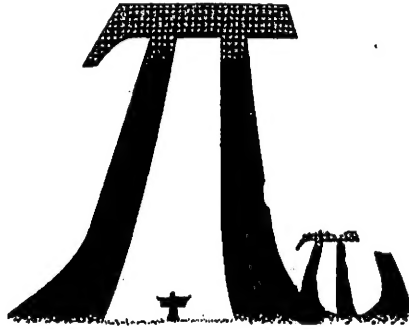
الترقيم الدولي I.S.B.N

977-5769-45-0

المشروع القومي للترجمة
بإشراف: جابر عصفور

هذه ترجمة لكتاب

THE MATHEMATICS



Ziauddin Sardar
Jerry Ravetz and
Borin Van Loon

حقوق الترجمة والنشر بالعربية محفوظة للمجلس الأعلى للثقافة
شارع الجبلية بالأوبرا - الجزيرة - القاهرة. ت: ٧٣٥٢٣٩٦ فاكس: ٧٣٥٨٠٨٤
El Gabalaya St. Opera House, El Gezira, Cairo
Tel: 7352396 E.Mail: asfour@oncbox.com

تهدف إصدارات المشروع القومي للترجمة إلى تقديم كافة الاتجاهات والمذاهب الفكرية للقارئ العربي وتعريفه بها ، والأفكار التي تتضمنها هي اجتهادات أصحابها في ثقافتهم المختلفة ولا تعبر بالضرورة عن رأى المجلس الأعلى للثقافة .

«مقدمة»

بقلم المراجع

«أقدم لك.. هذا الكتاب!»

هذا هو الكتاب الحادى عشر فى سلسلة «أقدم لك..» وهو يدور حول « الرياضيات ...»

والواقع أن الرياضيات ترتبط بالفلسفة ارتباطاً دقيقاً منذ فجر الفلسفة عندما كتب أفلاطون على باب الأكاديمية «مَنْ لم يكن رياضياً فلا نصيب له عندنا» أو «من لم يكن مهندساً فلا يدخل علينا». وجعل الرياضيات مدخلاً إلى الفلسفة واشترط كلامه دراسة الرياضيات كخطوة تمهيدية لدراسة الفلسفة - ولقد كان برتراند رسل فى الفلسفة المعاصرة هو المثل النموذجى لهذه الرابطة ، فقد دخل إلى الفلسفة من باب الرياضيات عندما حاول تعريف «العدد» ، وكما حاول فى كتابه «أصول الرياضيات» أن يحدد معنى اللامعرفات..

وربما اشتركت الرياضيات أيضاً مع الفلسفة فى خاصيتين هامتين هما «التجريد» و «الصورية» - ولعل هذا هو السبب فى شكوى الناس من الرياضيات، ومن الفلسفة فى آن معاً. (لأن التفكير البشرى يبدأ بالمحسوسات ويتمسك بها ويجد صعوبة فى الانتقال من المحسوس إلى اللامحسوس أو المجرد!) - ولهذا السبب يبدأ المؤلف فى الصفحة الأولى من كتابه بالحديث عن شكوى الناس من الرياضة متصورين أن الناس ينقسمون قسمين أشخاص يفهمون الرياضيات (وهم نوع خاص من البشر) وأشخاص لا علاقة لهم بها!.

لكنه يبين لنا مدى حاجتنا إلى الرياضيات التى يرى أن الحياة لا يمكن تصورها بدونها. فنحن نحتاج إلى الرياضيات فى البيع والشراء، وفى التسوق، وإعداد ميزانية

المنزل، وإدارة أعمالنا، وبناء منازلنا، دائماً في أعمالنا المصرفية، وعمل الخرائط، والسفر حول العالم بل حتى إلى الخروج من عالمنا إلى الفضاء الخارجي! بل إن الرياضيات ضرورية للعلم والاقتصاد والطب والتكنولوجيا باختصار هي المحرك الذي يحرك حضارتنا الصناعية !.

ثم يبدأ المؤلف في الحديث عن «علم الحساب» وتاريخه ومساره مع مراحل البشرية والحضارات القديمة، وهو العلم الذي بدأ عند القبائل البدائية بالعدّ فالعدّ قديم قدم الكتابة أو لعلّة أقدم منها، فقد استخدم الإنسان الأول الخطوط القائمة للدلالة على الأرقام، فرسم الواحد هكذا I والاثنين هكذا II والثلاثة هكذا III .. الخ، واستخدم الصينيون هذا الأسلوب حتى الخمسة IIII ، ثم عبروا عن الستة بخط قائم يعلوه خط أفقى هكذا T ، وعن السبعة بخطين قائمين يعلوهما خط أفقى TT وعن الثمانية بثلاثة خطوط يعلوها خط أفقى TTT وهكذا.

أما المصريون القدماء فقد رمزوا إلى الواحد بخط قائم I، وللاثنين بخطين قائمين II ورمزوا للعشرة بباب مقنطر ضيق Π، ومعظم طرائق العد مبنية على أساس الخمسة باعتباره عدد أصابع اليد الواحدة، أو على العشرة باعتبار عدد أصابع اليدين الاثنتين، أما البابليون فاتخذوا من الستين وحدة عددية، ودوّن اليونان الأعداد بالحروف الهجائية فجعلوها حرف a للواحد، وحرف b للاثنين، وهكذا حتى العشرة، واعتبروا الـ f الحادى عشر مقابل العشرين، والحرف الثانى عشر مقابل الثلاثين .. وهكذا.

أما الهنود فقد جعلوا للأرقام رموزاً مستقلة هي ١, ٢, ٣, ٤, ٥ .. الخ، واخترعوا الصفر، لكنهم لم يحسنوا استغلال تلك الأرقام ولم يفيدوا من اختراع الصفر.

ولقد أخذ العرب هذه الأرقام والصفر عن الهنود وعن العرب أخذ الغربيون الأرقام الهندية وسموها الأرقام العربية، وأخذوا الصفر أيضاً باسمه العربى «صفر» (أى فارغ أو خال) ولفظ Cipher فى الإنجليزية (ومعناها صفر أيضاً) خير دليل على ذلك، ويقال : إن اختراع الصفر كان من أهم المنجزات الفكرية وبدون ما كانت الرياضيات الحديثة أمراً ممكناً..

والواقع أن الكتاب يعطى للحضارة العربية دوراً عظيماً فيما أسهمت به فى تاريخ

الرياضيات فنراه يقول صراحة : « قام المسلمون بتوحيد الفكر الرياضى فى جميع الحضارات السابقة عليهم فأدمجوا الجبر والعلاقات الحسائية البابلية والصينية والهندية بالعلاقات الهندسية اليونانية والهلنستية، وينتهى إلى أنهم كانوا على درجة عالية جداً من الجرأة فى «تعاملهم مع العمليات الحسائية» ثم يتحدث عن شخصيات عظيمة مثل الخوارزمى «مؤسس علم الجبر» وتطويره عند «الصموعل» والكراجى، وعمر الخيام الشاعر وعالم الرياضيات، والبطانى وغيرهم من أعلام المفكرين المسلمين..

والكتاب فى الواقع متعة لا تقدر حتى بالنسبة لغير المتخصص ، وإننا لنأمل أن نكون بترجمته قد قدمنا خدمة متواضعة فى المشروع القومى للترجمة.

والله نسأل أن يهدينا جميعاً سبيل الرشاد،

المشرف على المشروع

إمام عبد الفتاح إمام

لماذا الرياضيات ؟

يشن كل شخص عند الذكر المطلق للرياضيات ، فالكثير من الناس يعتقدون أن العالم مقسم إلى نوعين من الناس . الأول هم الأشخاص بالغو الذكاء الذين يفهمون الرياضيات وهم بالطبع ليسوا من النوع الذى يمكن مقابله فى إحدى حفلات السمر ...



ولكننا جميعاً نحتاج لفهم الرياضيات إلى حد ما، فبدون الرياضيات لا يمكن تصور الحياة.





في الواقع أصبحت الرياضيات دليلاً للعالم الذي نعيش فيه، العالم الذي نشكله ونغيره والذي نعتبر نحن جزءاً منه. ولأن العالم أصبح معقداً لدرجة كبيرة وكذلك الأشياء المشكوك فيها أصبحت مهمة ومنذرة ، فنحن نحتاج الرياضيات لوصف المخاطر التي نواجهها ولنخطط لمعالجتها.

وتتطلب قدرة التعامل مع الرياضيات موهبة خاصة ومهارة مثل أى مجال آخر للمحاولات البشرية كالرقص مثلاً. والرياضيات أنيقة جداً وجميلة فى روحها تماماً مثل الأداء الجاد المعقد لفرقة الباليه الماهرة. وبالرغم من أن معظمنا لا يستطيع أن يكون راقص باليه محترف لكننا نعرف كيفية الرقص وفعالياً من الممكن أن نرقص . وبالمثل يجب أن نعرف جميعاً ما تتناوله الرياضيات وأن تكون لدينا القدرة على فهم ومعالجة بعض الخطوات الأساسية.



الحساب



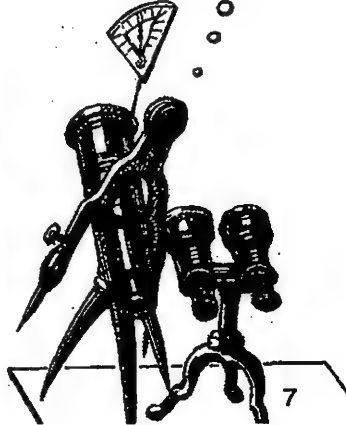
إلى حد ما يستعيد
المبتدئون في الرياضيات في
أذهانهم خطوات تطور البشرية
في معرفة الرياضيات

يتعلم الأطفال
في المدرسة
كيفية العد
والحساب والقياس

وبمجرد تعلمهم ذلك تبدو هذه الطرق
أنها ابتدائية، ولكن بالنسبة للمبتدئين تبدو أنها
مليئة بالألغاز.

أصبحت عملية تسمية الأرقام مثل التعويذة وخاصة
عند التعامل مع أكبر رقم، فالعد إلى مائة ممل
ولكن العد إلى ألف يشبه تسلق الجبال !
ترى ما هو الرقم الأخير أو أكبر الأرقام على
الإطلاق ؟

إذا لم يكن
لهذا موجوداً ، فما يوجد
في النهاية ؟



كيف أسمى الأرقام كما نقرؤهم واحداً تلو الآخر، ربما يكفي تسمية عدد قليل من الأرقام. تستطيع بعض الحيوانات تمييز التجمعات المختلفة حتى خمسة أو سبعة أفراد، وما يزيد عن ذلك يطلق عليه «العديد» فقط. ولكن إذا كنا نعرف أن الأرقام تزداد دون توقف فلا يمكننا إطلاق الأسماء الجديدة بدون توقف.



لم تكن لغة الهنود Dakota ^(١) مكتوبة ولكنها كانت عبارة عن قطعة من القماش مرسوم عليها صور بالحبر الأسود، وفي كل سنة يتم رسم صورة جديدة لتوضيح الحدث الرئيسي في السنة المنقضية.

(١) الداكوتا Dakota - قبيلة من الهنود الحمر في الولايات المتحدة الأمريكية تستخدم لغة خاصة بها هي اللغة السوانية Siouan (المراجع).

وأفضل طريقة لعملية تنظيم التسمية والعد هي اتخاذ «أساس» وهو عبارة عن رقم يميز بداية العد مرة أخرى. وأبسط أساس هو اثنان، فعلى سبيل المثال قامت مجموعة من الأستراليين البدائيين (Gumulgal) بالعد بالطريقة التالية :

١ = أورابون

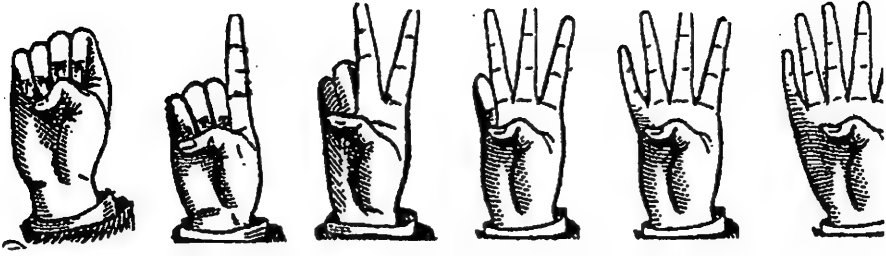
٢ = أوكاسار

٣ = أورابون - أوكاسار

٤ = أوكاسار - أوكاسار

٥ = أوكاسار - أوكاسار - أورابون.





وتعتبر أصابع اليد مفيدة في تعريف الأساسات، بعض الأنظمة تستخدم الخمسة كأساس والبعض الأكثر شيوعاً يستخدم العشرة. ويمكن استخدام العديد من الأساسات الأخرى. فعلى سبيل المثال العملة المتداولة في بريطانيا قديماً كان بها العديد من الأساسات : إثنا عشر (بنس في كل شلن) وبعد ذلك عشرون (شلن في كل جنيه استرليني) وحتى واحد وعشرون (شلن في كل جنيه إنجليزي). لذلك كان يلزم وجود مساعدين في الأسواق للمساعدة في عمليات تقدير الفواتير أما عند الشراء بالتقسيط فربما يتم إخبار الناس أن رداء غرفة المعيشة يتكلف ١٥٥ جنيه إنجليزي أو ما يعادل ١٠٤ قسط أسبوعي قيمته جنيه استرليني وخمسة عشر شلناً وسبعة بنسات ونصف.



هناك أساس آخر شائع وهو عشرون (أصابع القدمين واليدين) وقد استخدمه الـ (Yoruba) بالإضافة إلى خاصية الطرح عند التعبير عن الأرقام الكبيرة داخل هذا الأساس.

وقد كان لديهم أسماء مختلفة الأرقام واحد (أوكان) وحتى عشرة (إيوا). ومن إحدى عشر وحتى أربعة عشر كانوا يقومون بعملية الإضافة مثل إحدى عشر هو (واحد بالإضافة إلى عشرة) وأربعة عشر هو «أربعة مضافون إلى عشرة». أما الأرقام من خمسة عشر وحتى تسعة عشر فكانوا يقومون بالطرح مثل خمسة عشر هي «عشرون ناقصة خمسة» وتسعة عشر هي «عشرون ناقصة واحد».

ويظل هذا الأساس مستخدماً في الأرقام الفرنسية حيث إن ثمانين هي «أربعة عشرونات» أما تسعة وتسعون فهي أربعة عشرونات وتسعة عشر.



المتعاملون مع
الحسابات يستخدمون أساسات
منية على اثنين

وعلى ذلك لا يوجد هناك أساس واحد مفضل، ربما يمكننا التفكير في نظام أرقام يتم تصميمه بصفات مختلفة وهي : يسهل تذكُّره وملائم في تسميته ومفيد في الحساب إلخ.



الأرقام المكتوبة



من الممكن العد بطريقة فعالة في ثقافة ما دون كتابه، ولكن الحساب يتطلب عند ذلك ذاكرة كبيرة ومهارات خاصة. ولما كانت الكتابة منتشرة في الكثير من الحضارات، ظهرت العديد من أنظمة العد، البعض منها كان معقداً تماماً.



وقد استخدم الأزتك (●) نظاماً مبنياً على عشرين به أربعة رموز

الواحد رمز له بنقطة تعبر عن حبة الذرة. ●

٢٠ تم تمثيلها بعلم. P

٤٠٠ تم تمثيلها بنبات الذرة. 🌾

٨٠٠٠ تم تمثيلها بدمية الذرة. 🗿

ويمكن استخدام هذه الرموز للتعبير عن كل أنواع الأرقام وعلى سبيل المثال الرقم ٩٢٨٧ يمثل كذلك :



(●) الأزتك : شعب متمدن حكم المكسيك قبل أن يفتحها الأسبان.



١

٢

٣

٤

٥

٦

٧

٨

٩

١٠

١١

١٢

١٣

١٤

١٥

١٦

١٧

١٨

وكان نظام الترقيم عند الـ «Mayans» به ثلاثة رموز فقط :



لذلك

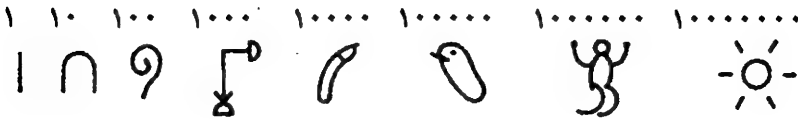
... هي ٣

... أما ١٣ فهي

ويتيم تمثيل العشرين بـ



ولقد استخدم المصريون القدماء مخطوطة تصويرية (الهيروغليفية) لكتابة أرقامهم.



وقد استخدم البابليون نظاماً يتخذ من ٦٠ ومضاعفاته أساساً له بالرموز التالية :

١ ٥ ١٠ ٥ ٦٠ ٥ ٦٠٠ ٥ ٣٦٠٠

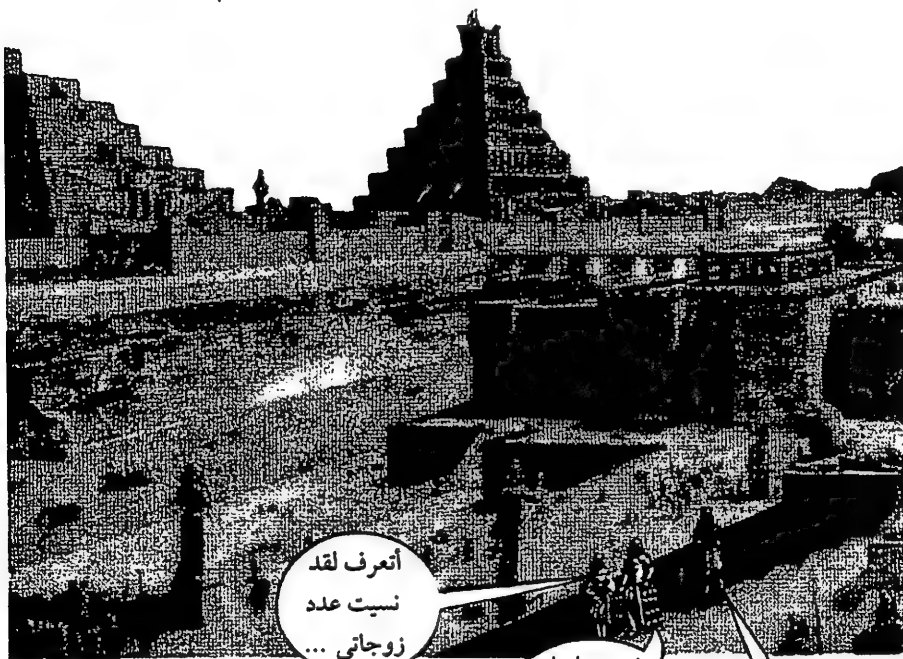
بعد ذلك قاموا بتطوير نظام مبني فقط على قيمتين :

٢ ترمز للواحد أو ٦٠ على حسب موقعها و < ترمز للعشرة

لذلك يمكن كتابة ٩٥ على النحو التالي :

$$٩٥ = ٦٠ (١) + ٣٥$$

٢ < ٢ ٢ ٢ ٢ ٢



ولقد بقي النظام الستوني البابلي حتى هذه الأيام، فالدائرة تحتوي على ٣٦٠ درجة والساعة بها ٦٠ دقيقة ، وتحتوي الدقيقة على ٦٠ ثانية.

وقد استخدم الصينيون القدماء نظام أعداد له أساس ١٠ برموز للأرقام من واحد وحتى عشرة والمائة والألف وكذلك العشرة آلاف ، وبعد ذلك طور الصينيون صيغة للعد باستخدام قطع مستقيمة (سيقان).



(*) مصفحة : صفحة طباعية تصنع بصب المعدن في قالب من الورق المعجون.

وقد قدم الصينيون اختراعاً عظيماً وهو وضع الرموز المكتوبة في عالم من الأسماء المنطوقة للأرقام، وكان هذا عبارة عن نظام لـ «القيمة المكانية». حيث تعتمد تسمية الرقم (كتعبير عن الكمية) على مكانه في صف الأرقام. لذلك من الممكن أن يكون الرقم (٢) هو اثنان أو عشرون أو مائتان على حسب موقعه، وهذا يعني أنه لا يلزم تسمية الأساسات الأعلى، فمن المعروف أن (٢) في الرقم (٢٣٤) تعني ٢٠٠.



أما الهنود فقد طوروا ثلاثة أنواع واضحة لأنظمة الأعداد.

قام (Kharosthi) باستخدام رموز للعشرة والعشرين وتم التعبير عن الأرقام من ١ حتى ١٠٠ بالجمع.

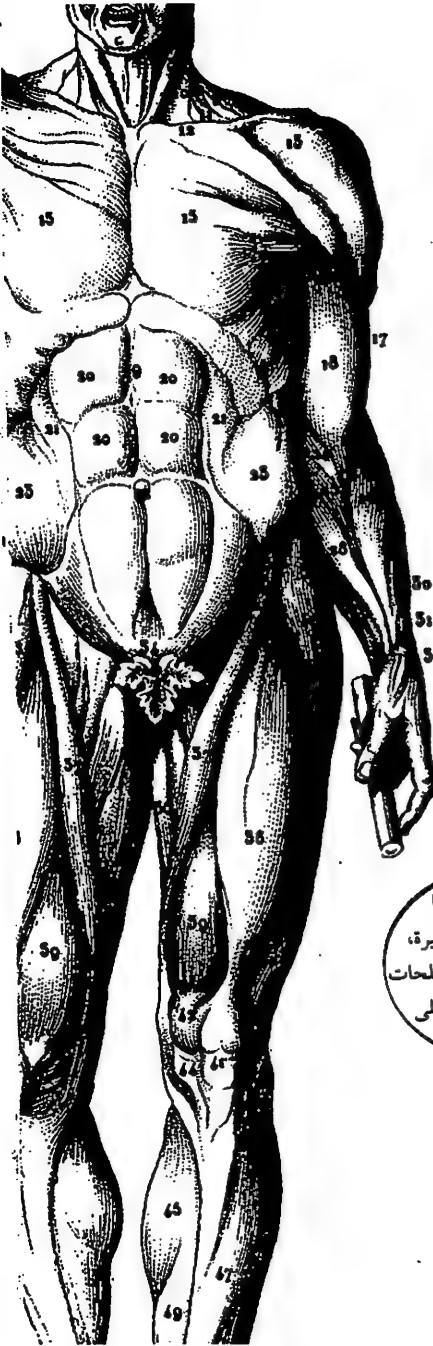
أما الـ (Brahmi) فقد استخدموا رموزاً منفصلة للواحد، الأربعة حتى التسعة والعشرة والمائة، وهكذا.

أما Gwalior فكان لديهم رموز للأرقام من واحد وحتى التسعة وكذلك للصفر.

فكر في عدد ما ...
حسناً، الآن ضاعفه ...
ثم احسب ثلاثة أضعافه ...
ثم أربعة أضعافه ...



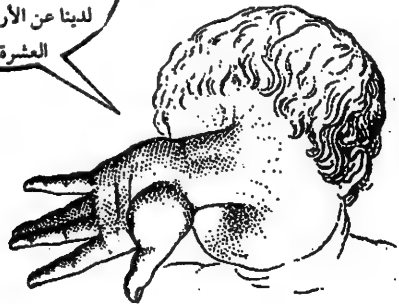
ولقد قام الهنود بالتعامل مع الأرقام الكبيرة براحة تامة، حيث أعطت النصوص الهندية القديمة أسماء لأرقام كبيرة مثل ١٠٠٠, ٠٠٠, ٠٠٠, ٠٠٠ وأسموه (باراردها Parardha).



وكان للقدماء اليونانيين نظامان متوازيان للأعداد، الأول كان مبنياً على الأحرف الأولى للأعداد، مثلاً يرمز للخمسة بالحرف باي (π) أما العشرة فيرمز لها بدلتا (Δ) والمائة بالصيغة القديمة للحرف (H) وهكذا.

أما النظام الثانى والذي ظهر فى القرن الثالث قبل الميلاد فقد استخدم كل حروف الهجاء اليونانية وثلاثة من الحروف الفينيقية ليصبحوا سبعة وعشرين رمزاً رقمياً. وكانت أول تسعة أحرف ترمز للأرقام ١ حتى ٩؛ أما التسعة التالية فكانت ترمز للعشرات من ١٠ وحتى ٩٠ أما التسعة أحرف الأخيرة فكانت ترمز للمئات من ١٠٠ وحتى ٩٠٠.

نحن اليونانيين قاومنا الخوف من الأرقام الكبيرة، وبصعوبة عبر علم المصطلحات لدينا عن الأرقام التي تلى العشرة آلاف



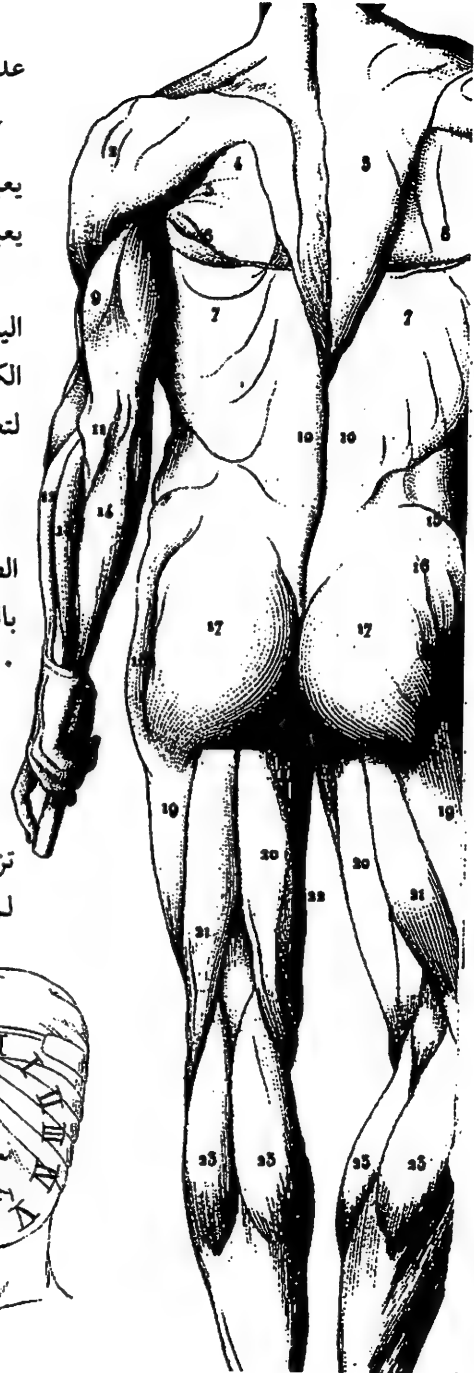
أما النظام الروماني فكان يحتوي على
عدد سبعة رموز للأرقام: I يعبر عن ١، و

V يعبر عن ٥، و X يعبر عن ١٠، و L
يعبر عن ٥٠، و C يعبر عن ١٠٠، و D
يعبر عن ٥٠٠، و M يعبر عن ١٠٠٠.

وكانت الأرقام تكتب من اليسار إلى
اليمن حيث تكتب الأرقام ذات القيمة
الكبيرة في اليسار ثم تُجمع مع بعضها
لتعطي قيمة الرقم المشار إليه.
وعلى ذلك LX هو ٦٠.

وللملاءمة، كان الرقم ذو القيمة
الصغيرة الموضوع على اليسار يُفسر
بالطرح، وعلى ذلك الرقم McM يعني
١٩٠٠.

والأرقام الرومانية بالرغم من أنها لا
تزال تستخدم الآن كوسيلة للتزيين، إلا أنها
لم تكن مناسبة لعمل الحسابات السريعة.



وقد أدى استخدام حروف الهجاء للتعبير عن الأرقام إلى ظهور فن التنبؤ العالى فى تطوره والذي يسمى Gomatria . ويقوم أحد الأشخاص بترتيب أحرف كلمة ما أو اسم على وجه الخصوص ليكون رقماً ما ثم يقوم بتفحصه للبحث عن نوع ومعنى لهذا الرقم. والشخص الذى ينتج اسمه رقماً مثل ٦٦٦ (عدد الحيوانات فى التوراة) كان يوضح شيئاً سيئاً !



وقد طورت الحضارة الإسلامية (منذ ٦٥٠ بعد الميلاد وحتى الآن) مجموعتين متشابهتين من الأرقام. كانت واحدة منهم تستخدم في الجزء الشرقي (بلاد العرب وفارس).

أما الأخرى فكانت تستخدم في الجزء الغربي (بلاد المغرب والأندلس). وكلتا المجموعتين كانت تحتوي على عشر رموز من الصفر وحتى التسعة.

المجموعة الشرقية : ٠ ٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١

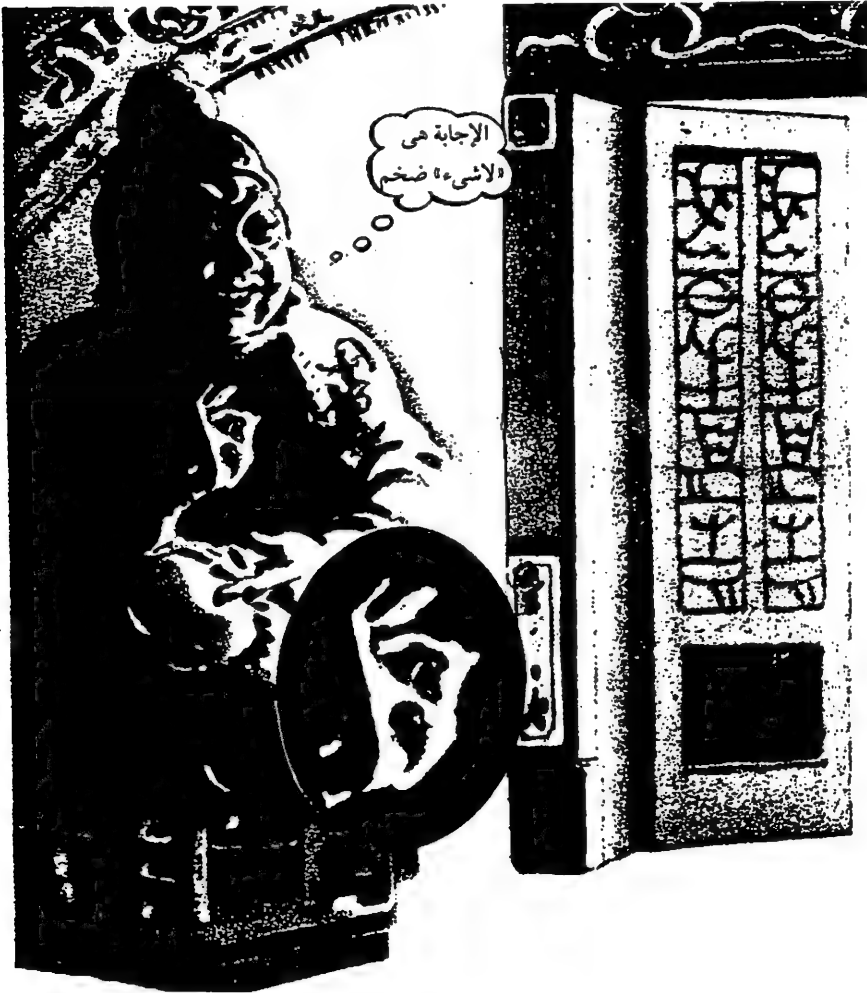
المجموعة الغربية : ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

وقد بقيت المجموعة الشرقية تستخدم حتى الآن في العالم العربي، أما المجموعة الغربية والتي تدعى الأرقام العربية فهي تمثل نظام الأرقام الذي نستخدمه جميعاً في هذه الأيام.

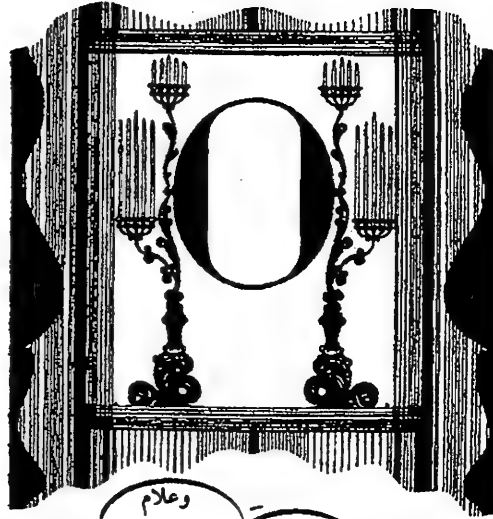


الصففر

يعتبر الصففر اختراعاً متأخراً نسبياً (حيث تم وضعه فى القرن السادس بعد الميلاد)، ويبدو أنه ناتج عن ارتباط الحضارتين الصينية والهندية. وقد كان الصينيون يحتاجونه للتعبير عن قيمة المكان - كيف مثل الصينيون المكان الخالى فى الرقم مئتين وخمسة ؟ والرقم ٢٥ يعتبر خطأً لذلك كان يلزم شىء ما يوضع فى المكان الخالى مثل ٥ - ٢. لكن المعنى الكامل للصففر كان قد تم تطويره فى الحضارة الهندية، حيث إن التأملات الفلسفية فى الفراغ كانت قد تطورت بدرجة كبيرة.



وهذا النوع من الخلفية الثقافية كان ضرورياً جداً للاختراع، وللصفر على وجه الخصوص. والصفر يمكن أن نتعامل معه مثل بقية الأرقام حيث إننا من الممكن أن نقوم بالجمع عليه.



ولكن عملية ضرب الصفر مع أى رقم آخر تعطى صفر. ومن الممكن أن نقوم بعمل تناقضات باستخدام معادلة مثل $0 \times 4 = 0 \times 2$ وبعد ذلك نهمل الصفر لتصبح $4 = 2$.



وبينما يعتبر الصفر ضرورياً في الحسابات ولكنه يُستبعد في العد. فأول شيء في صف أشياء لا يقال له «الصفرى». وهناك تناقض واضح في التقويم الميلادى : تسمى الفترة ١٩٠٠ - ١٩٩٩ بالقرن العشرين حيث لم يكن هناك قرن صفرى في بداية التقويم الميلادى.

والصفر له معنيان كما هو واضح من «أضحوكة الصفریات»، حيث يتحدث مرشد في أحد المتاحف إلى المجموعة المدرسية :



... كما قد تعلمته في المدرسة ! لم يقم أحد بإخبارها أن الأصفار بعد ٦٥ كانوا مجرد ملء خانات وليسوا للعد. فبالنسبة لتلك الأصفار لدينا $٤ \times ٠ = ٠$ وكذلك $٤ + ٠ = ٠$! ربما الوعي بتلك التناقضات هو الذي جعل الرياضيين الأوائل مرتابين من الأرقام الغريبة مثل الصفر.

أرقام خاصة

إلى جانب الصفر،
هناك أنواع أخرى من
الأرقام الخاصة التي
يجب أن نكون على
دراية بها.

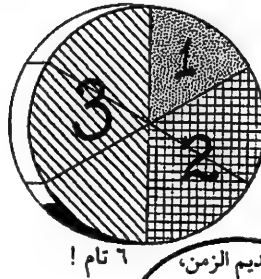
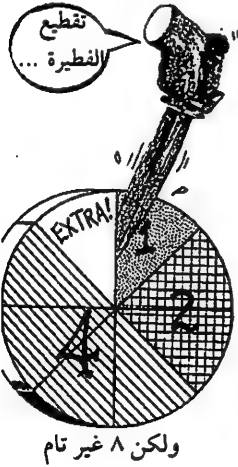
البعض منهم «أرقام بالطبيعة»
التي من الممكن أن يقال إن
لديها خصائص سحرية. الأرقام

٧، ٥، ٣ و ١٣ كل منهم رقم خاص بطريقته الخاصة، وهناك أيضاً
أنواع من الأرقام يتم تعريفها من خلال خصائصها الحسابية التي
تجذب الاهتمام.

الأعداد الأولية هي تلك الأعداد التي لا
تقبل القسمة إلا على نفسها أو الواحد

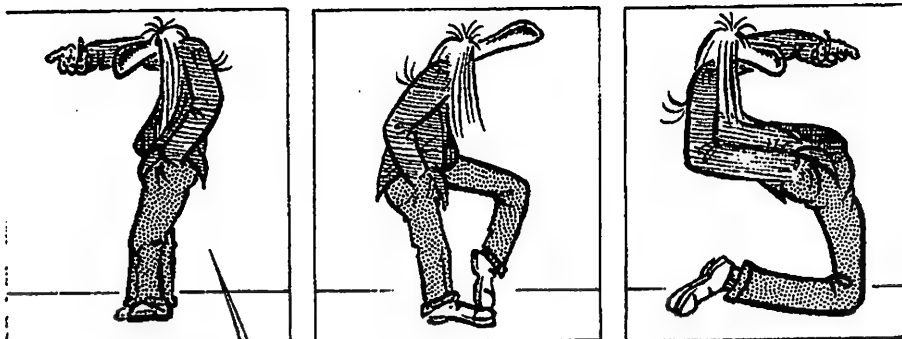
الأعداد التامة هي التي تساوي مجموع عواملها - أي الأعداد التي
تقبل القسمة عليها.

لذلك العدد ٦ الذي له عوامل ١، ٢، ٣ هو عدد تام حيث إن ١
و ٣، ٢ + ٣ = ٦.

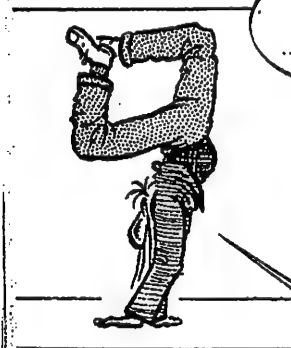


وكمثال آخر
 $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$
أما المثال التالي فهو ٤٩٦
حاول استنتاجه بنفسك

في قديم الزمن،
مثل تلك الأرقام كانت
تعتبر خاصة جداً. لذلك
سميت بهذا الاسم



إذا فعلت
خطأين يؤدي
ذلك إلى
صواب؟



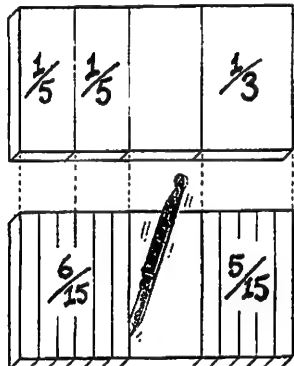
حاول جمع
 $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$
قطع الحلوى ...



رسم
الأشكال
بالأرقام ...

الأرقام السالبة هي تلك الأرقام الأصغر من الصفر (مثل درجة الحرارة في يوم بارد) ويتم تمثيلها بإشارة ناقص، وهي أرقام أساسية ولها تناقضاتها الخاصة بها مثل $(-1) \times 1 = -1$

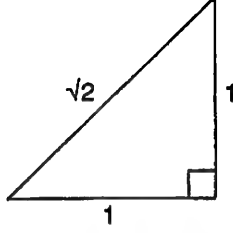
«الكسور» أو الأعداد النسبية هي الأعداد التي يمكن وضعها في صورة نسبة بين عددين صحيحين، مثل $\frac{2}{3}$. وهذه الأعداد ضرورية في الحسابات ولكنها لا تصلح في العد، فلا يوجد وحدة في الكسور ولا تتابع مثل: ٥ تلي ٤ لذلك مضى وقت طويل قبل قبولهم على أنهم أرقام. كذلك فإن هذه الأرقام لها الحسابات الخاصة بها التي هي على درجة عالية من الصعوبة لدرجة يصعب معها فهمها.



كل هذه الأنواع كانت معروفة في مختلف الحضارات مثل الحضارة الصينية والهندية. ومع تطور الرياضيات النظرية وخاصة بين اليونانيين، ظهرت صفات غريبة للأرقام والتي أدت إلى ابتكار أنواع جديدة من الأرقام.

الأرقام غير النسبية وهى الأرقام التى لا يمكن التعبير عنها بنسبة بين رقمين صحيحين .
و $\sqrt{2}$ هو مثال هام لتلك الأرقام حيث إنه ينتج من العمليات الهندسية فهو طول وتر

المثلث قائم الزاوية الذى به طول
ضلعى القائمة الوحدة.
وتسمى هذه الأرقام بالجذور
الصامتة.



بعض الكميات
غير نسبية، لا يمكن التعبير
عنها حتى بأرقام تنتج من
عمليات جبرية

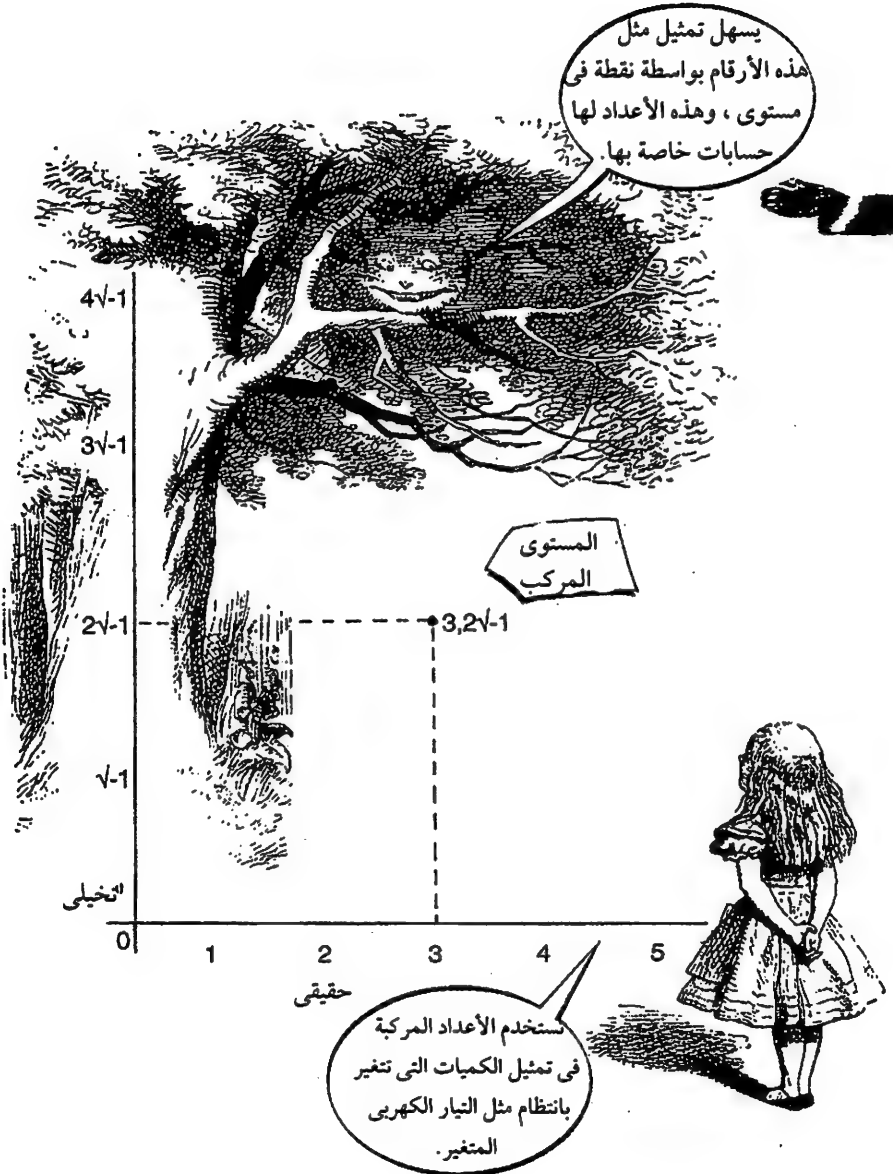
وأشهر هذه
الأرقام هو π أو π
وهو نسبة محيط
الدائرة
لقطرها.



وعملية اختصار هذه
النسب إلى جذور صماء
تسمى «تربيع الدائرة» وقد
حاول فى ذلك علماء
الرياضة على مدى قرون
حتى تم توضيح أن هذه
عملية مستحيلة فى الأيام
المعاصرة عند ذلك تمت
تسمية هذه الأرقام ! ...

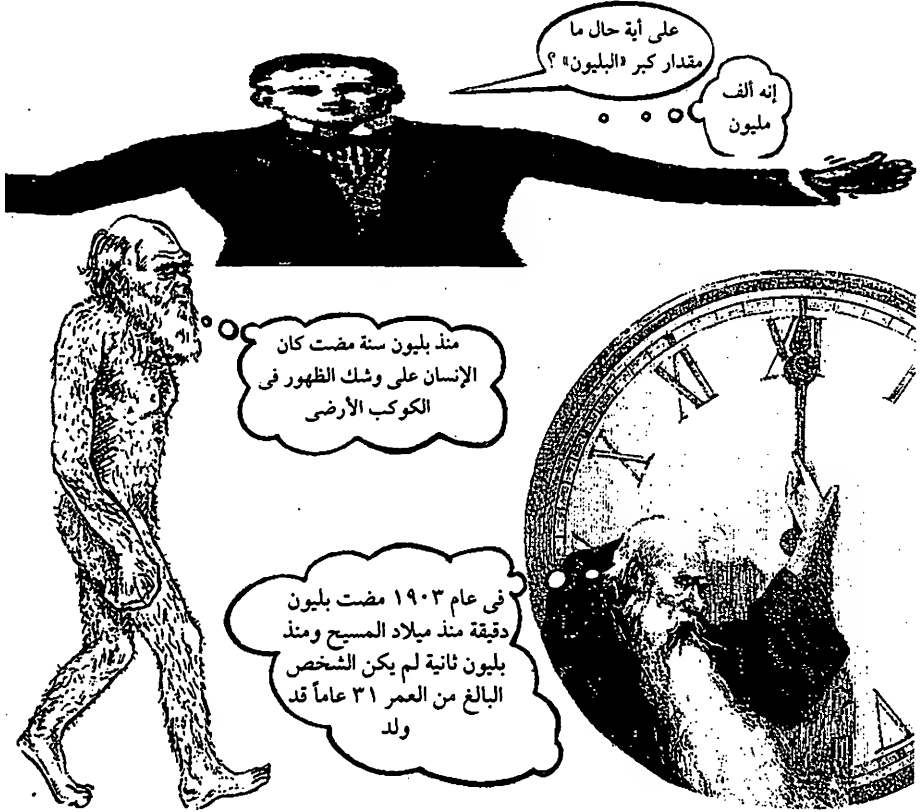


الأعداد التخيلية تنتج من ضرب الأعداد الحقيقية بالكمية التخيلية، وهي الجذر التربيعي لسالب واحد ($\sqrt{-1}$). وعند إضافة عدد تخيلي لآخر حقيقي يسمى الناتج "الأعداد المركبة".



الأرقام الكبيرة

تقوم الأرقام الكبيرة بإرهاب الكثير منا لدرجة أننا نجد صعوبة في تقدير القيمة الحقيقية لتلك الأرقام.



ويبدو المائة مليون رقماً أكثر ترويعاً، ولكن في هذه الأيام يعتبر رقماً غير عادي بالنسبة لدولة ما، وخاصة بالنسبة لدولة نامية (أي تكون مدينة بمثل هذا الدين). ولو أن هناك دولة أرادت التخلص من دينها قامت بدفع دولار، أو جنيه

واحد كل ثانية على مدار أربع وعشرين ساعة
يوماً وسبعة أيام أسبوعياً واثنين
وخمسين أسبوعاً سنوياً،
ربما تستغرق
٣١٨٠ سنة لسداد ...



وكيفية الوصول إلى هذه الأرقام الكبيرة بسهولة يتم توضيحه بمثال بسيط وهو الخطاب المتسلسل. يقوم شخص ما بإرسال خطابين إلى شخصين يخبر كلاهما بإرساله إلى اثنين آخرين وهكذا. في هذه الحالة قام الشخص الأول بإرسال خطابين، وفي المرحلة الثانية تم إرسال $2 \times 2 = 4$ خطابات أما المرحلة الثالثة ففيها $2 \times 2 \times 2 = 8$ خطابات. إذن كم عدد المجموعات المطلوبة للوصول إلى بليون خطاب؟



الأسس



الرعد
العظيم
الأسس
تفيض
بداخله!

من الواضح أن
كتابة البليون
مرهقة جداً، ولحسن
الحظ توجد نظرية
ملائمة لكتابة الأرقام
الكبيرة. ومن الممكن أن
نلاحظ ذلك من خلال البليون
الذي يساوي :

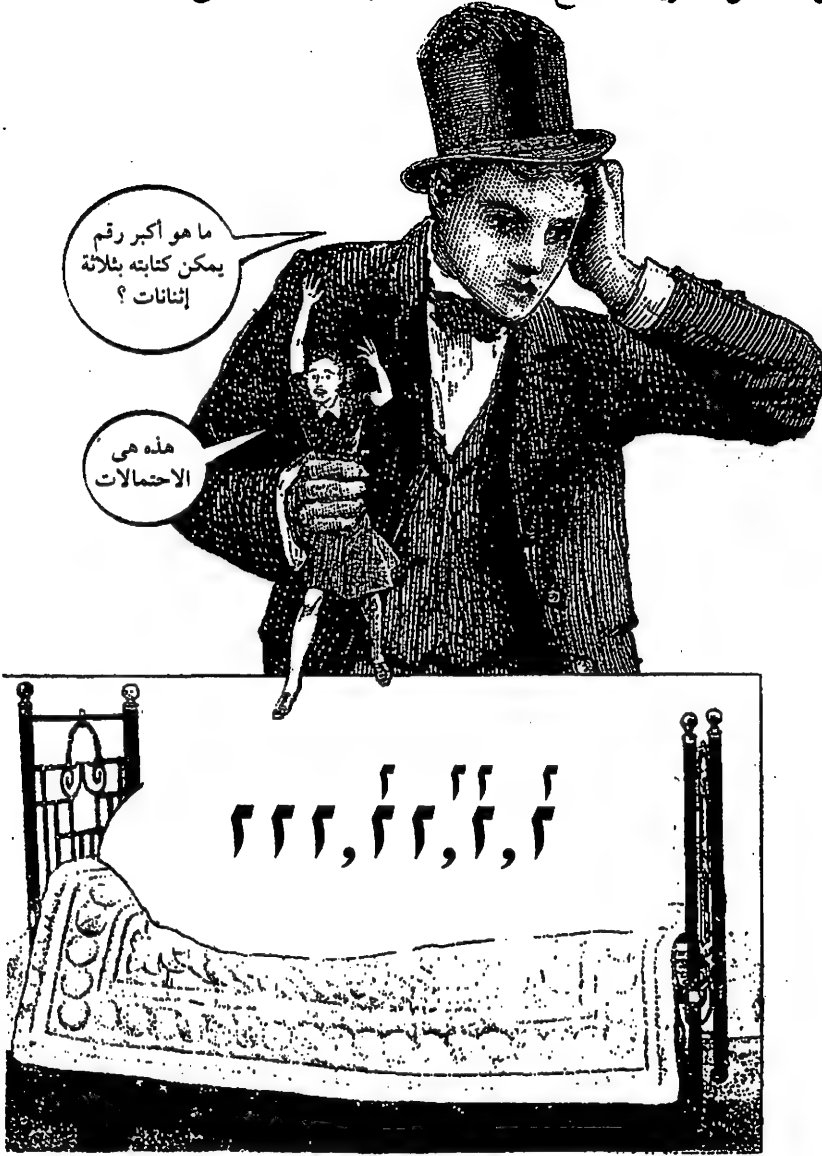
$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$$

لذلك إذا رمزنا لحاصل ضرب عشرين
ببعض بالرمز 10^2 وحاصل ضرب ثلاث
عشرات بـ 10^3 وهكذا من الممكن كتابة
المليون هكذا 10^6

أما البليون فيصبح 10^9 ، بالإضافة إلى ذلك
نكتب خمسة بليون هكذا 5×10^9 .

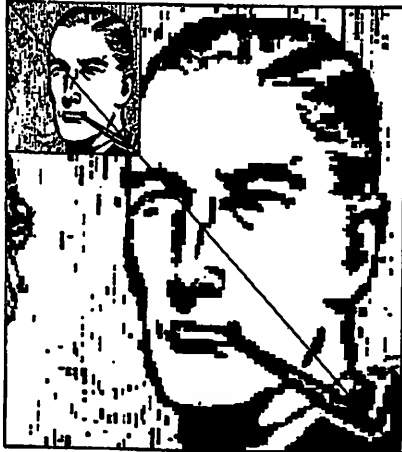
وعملية رفع أي شيء إلى أس ما تعني أن هذا الشيء
يضرب في نفسه عدداً من المرات مساو لهذا الأس،
لذلك 2^5 تعني $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ أو 32 .

ومن الممكن أن نُزيد ألفتنا مع هذه الملاحظات بتفقد المثال التالي :



أصغر رقم في هذه الاحتمالات هي $٢٢ = ٢ = ٢ = ٤$ ، يليه ٢٢٢ ثم بعد ذلك $٢٢٢ = ٤٨٤$ وأكبر رقم هو $٢٢٢ = ٤١٩٤٣٠٤$.

وكتابة الأسس تصلح أيضاً في حالة الكسور ، ولتحويل أس ما إلى كسر نقوم ببساطة بوضع إشارة سالبة أمام الأس ، لذلك $١٠^{-١} = \frac{١}{١٠}$ ، $١٠^{-٢} = \frac{١}{١٠٠}$ ، $١٠^{-٣} = \frac{١}{١٠٠٠}$ وهكذا .



وينفس الطريقة إذا كبرنا خريطة أو رسمه ما عدد س من المرات، فإن عدد س^٢ ضعفاً من الورق يكون مطلوباً لذلك. ونسمى س، س^٢، س^٣، س^٤، س^٥ بالأس الأول، والثاني، والثالث، والرابع، والخامس لـ س على الترتيب. وكان يطلق على الأسس في البداية «التربيع» و«التكعيب» من خلال معناهم الهندسي. وبالطبع بدلاً من ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ من

الممكن أن يكون هناك أي أس آخر؛ باستخدام «ن» لتعبر عن أي رقم نقول: إن س^ن تسمى الأس النوني لـ س.



وعلى مر المصور، كان علماء الرياضيات مرتبكين من هذه الأسس الكبيرة؛ فلم يتمكنوا من تخيل فراغ زائد يمكنهم وصف شكل الأرقام فيه.

وقد قدم عالم الرياضيات المسلم «ابن يحيى الصموغلي» (المتوفى عام ١١٧٥) في كتابه «الباهر» (الذي ألفه عندما كان عمره تسعة عشر عاماً) لأول مرة تعريف ...

أس الصفر



هذا يعني أن أي
شيء مرفوعاً لأس
صفر يساوي ١

لأننا لو قمنا بضرب
أي شيء في نفسه عدد
«صفر مرة» نحصل على
الوحدة.



اللوغاريتمات

اللوغاريتم هو الأس الذي يُرفع إليه رقم ما
ليعطى رقماً آخر، ويسمى الرقم الأول الأساس.
وحيث إن $10^2 = 100$ فهذا يعنى أن لو ١٠
 $100 = 2$ ، وتقرأ كالتالى : لو للأساس ١٠
للرقم ١٠٠ يساوى اثنين.

والأساسات الأكثر شيوعاً للوغاريتمات هي
١٠. والعدد الأسى e (أو الأساس الطبيعي ،
انظر صفحة ١٠٥).

وحيث أن $س^0 = ١$ لآى س فهذا يعنى أن
لو ١ = صفر لآى أساس.

ولضرب أو قسمة تعبيرين لوغاريتميين نقوم
باستخدام القاعدة «ضرب أو قسمة أس رقم ما
يعبر عنه بجمع أو طرح الأسس» ، لذلك لو
(س X ص) ببساطة يساوى لو س + لو ص.



سجل إيقاع سجل
موسيقى.....



الجمع أسهل بكثير
من الضرب



واللوغاريتمات تعتبر ذات نفع عظيم في تبسيط الحسابات الطويلة المعقدة. فللقيام بعملية ضرب أو قسمة عددين كبيرين نقوم أولاً باستخراج لوغاريتماتهم من الجدول ثم نجمعهم أو نطرحهم ونضع الناتج في الجدول لاستخراج المجموع (أو خارج القسمة).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37	55	7404	7412	7419	7427
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34	56	7482	7490	7497	7505
12	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1071	1100	1130	3	7	10	14	17	21	24	28	31	57	7550	7566	7574	7582
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	9	12	15	18	21	24	27	58	7634	7642	7649	7657
14	1461	1495	1528	1561	1593	1624	1654	1684	1714	1743	3	6	8	11	14	17	20	22	25	59	7709	7716	7723	7731
15	1761	1790	1818	1847	1875	1901	1927	1952	1977	2001	3	5	8	11	13	16	18	21	24	60	7782	7789	7796	7803
16	2041	2068	2095	2122	2148	2174	2200	2225	2250	2274	3	5	7	10	12	15	17	20	22	61	7853	7860	7868	7875
17	2304	2330	2355	2380	2405	2429	2453	2477	2501	2524	3	5	7	9	12	14	16	19	21	62	7934	7941	7948	7955
18	2553	2577	2601	2625	2648	2671	2694	2717	2740	2762	3	4	7	9	11	13	15	17	19	63	7993	8000	8007	8014
19	2788	2810	2832	2854	2875	2896	2917	2938	2958	2978	3	4	6	8	11	13	15	17	19	64	8066	8073	8080	8087
20	3010	3030	3050	3069	3088	3107	3126	3145	3163	3181	3	4	6	8	10	12	14	16	18	65	8129	8136	8143	8149
21	3222	3241	3259	3277	3295	3313	3331	3349	3366	3384	2	4	6	8	10	12	14	16	18	66	8195	8202	8209	8215
22	3404	3421	3438	3455	3472	3489	3506	3522	3539	3555	2	4	6	8	10	12	14	16	18	67	8261	8267	8274	8280
23	3617	3633	3649	3665	3681	3696	3712	3727	3742	3757	2	4	6	8	10	12	14	16	18	68	8325	8331	8338	8344
24	3802	3817	3832	3847	3862	3877	3892	3907	3922	3937	2	4	6	8	10	12	14	16	18	69	8388	8395	8401	8407
25	3979	3993	4008	4022	4037	4051	4066	4080	4095	4109	2	4	6	8	10	12	14	16	18	70	8451	8457	8463	8467
26	4150	4164	4178	4192	4206	4220	4234	4248	4262	4275	2	4	6	8	10	12	14	16	18	71	8513	8519	8525	8531
27	4314	4327	4340	4353	4366	4379	4392	4405	4418	4430	2	4	6	8	10	12	14	16	18	72	8573	8579	8585	8591
28	4472	4484	4496	4508	4520	4532	4544	4556	4567	4579	2	4	6	8	10	12	14	16	18	73	8633	8639	8645	8651
29	4771	4782	4793	4804	4815	4825	4836	4846	4857	4867	2	4	6	8	10	12	14	16	18	74	8692	8698	8704	8710
30	4969	4979	4989	4999	5009	5019	5029	5039	5049	5059	2	4	6	8	10	12	14	16	18	75	8751	8757	8763	8769
31	5157	5166	5176	5186	5195	5205	5215	5225	5235	5245	2	4	6	8	10	12	14	16	18	76	8811	8817	8823	8829
32	5343	5352	5361	5371	5381	5391	5401	5411	5421	5431	2	4	6	8	10	12	14	16	18	77	8865	8871	8877	8883
33	5518	5527	5536	5546	5556	5566	5576	5586	5596	5606	2	4	6	8	10	12	14	16	18	78	8921	8927	8933	8939
34	5691	5700	5709	5719	5729	5739	5749	5759	5769	5779	2	4	6	8	10	12	14	16	18	79	8976	8982	8988	8994
35	5844	5853	5862	5872	5882	5892	5902	5912	5922	5932	2	4	6	8	10	12	14	16	18	80	9031	9037	9043	9049
36	5985	5994	6004	6014	6024	6034	6044	6054	6064	6074	2	4	6	8	10	12	14	16	18	81	9085	9091	9097	9103
37	6125	6134	6144	6154	6164	6174	6184	6194	6204	6214	2	4	6	8	10	12	14	16	18	82	9143	9149	9155	9161
38	6255	6264	6274	6284	6294	6304	6314	6324	6334	6344	2	4	6	8	10	12	14	16	18	83	9197	9203	9209	9215
39	6385	6394	6404	6414	6424	6434	6444	6454	6464	6474	2	4	6	8	10	12	14	16	18	84	9243	9249	9255	9261
40	6514	6523	6533	6543	6553	6563	6573	6583	6593	6603	2	4	6	8	10	12	14	16	18	85	9294	9300	9306	9312
41	6643	6652	6662	6672	6682	6692	6702	6712	6722	6732	2	4	6	8	10	12	14	16	18	86	9345	9351	9357	9363
42	6771	6780	6790	6800	6810	6820	6830	6840	6850	6860	2	4	6	8	10	12	14	16	18	87	9395	9401	9407	9413
43	6899	6908	6918	6928	6938	6948	6958	6968	6978	6988	2	4	6	8	10	12	14	16	18	88	9445	9451	9457	9463
44	7027	7036	7046	7056	7066	7076	7086	7096	7106	7116	2	4	6	8	10	12	14	16	18	89	9497	9503	9509	9515
45	7155	7164	7174	7184	7194	7204	7214	7224	7234	7244	2	4	6	8	10	12	14	16	18	90	9549	9555	9561	9567
46	7283	7292	7302	7312	7322	7332	7342	7352	7362	7372	2	4	6	8	10	12	14	16	18	91	9599	9605	9611	9617
47	7411	7420	7430	7440	7450	7460	7470	7480	7490	7500	2	4	6	8	10	12	14	16	18	92	9638	9644	9650	9656
48	7539	7548	7558	7568	7578	7588	7598	7608	7618	7628	2	4	6	8	10	12	14	16	18	93	9685	9691	9697	9703
49	7667	7676	7686	7696	7706	7716	7726	7736	7746	7756	2	4	6	8	10	12	14	16	18	94	9731	9737	9743	9749
50	7795	7804	7814	7824	7834	7844	7854	7864	7874	7884	2	4	6	8	10	12	14	16	18	95	9777	9783	9789	9795
51	7933	7942	7952	7962	7972	7982	7992	8002	8012	8022	2	4	6	8	10	12	14	16	18	96	9823	9829	9835	9841
52	8060	8069	8079	8089	8099	8109	8119	8129	8139	8149	2	4	6	8	10	12	14	16	18	97	9868	9874	9880	9886
53	8187	8196	8206	8216	8226	8236	8246	8256	8266	8276	2	4	6	8	10	12	14	16	18	98	9914	9920	9926	9932
54	8314	8323	8333	8343	8353	8363	8373	8383	8393	8403	2	4	6	8	10	12	14	16	18	99	9959	9965	9971	9977

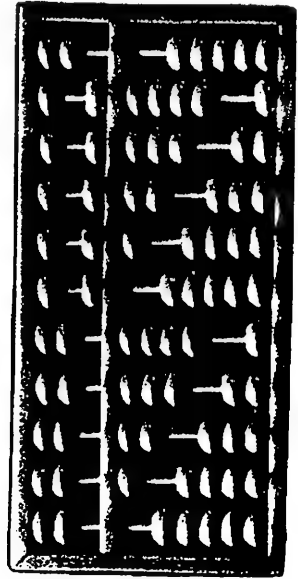
وكانت أول الجداول تلك التي أنشأها عالم الرياضيات الاسكتلندي جون نابير (١٥٥٠ - ١٦١٧)، وكانوا للأساس الطبيعي e. وقد أطلق عليهم «طبيعي» نسبة للأساس، أو «نابيريان» نسبة إلى مخترعهم.



الحساب

عملية ضرب الأرقام من كل الأنواع والحصول على ناتج تسمى الحساب، وهو متضمن في كل العمليات الرياضية. وكان الحساب يتم في البداية باستخدام الحصى كما كان يفعل اليونانيون القدماء باستخدام الحصى للقيام بالحسابات الأولية. وأصل كلمة يحسب Calculate في اللغة الإنجليزية هي كلمة «Calculus» اللاتينية والتي تعني «حصة».

	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	7450	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
2	7530	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
4	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
5	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												
21												
22												
23												
24												
25												
26												
27												
28												
29												
30												
31												
32												
33												
34												
35												
36												
37												
38												
39												
40												
41												
42												
43												
44												
45												
46												
47												
48												
49												
50												
51												
52												
53												
54												
55												
56												
57												
58												
59												
60												
61												
62												
63												
64												
65												
66												
67												
68												
69												
70												
71												
72												
73												
74												
75												
76												
77												
78												
79												
80												
81												
82												
83												
84												
85												
86												
87												
88												
89												
90												
91												
92												
93												
94												
95												
96												
97												
98												
99												
100												

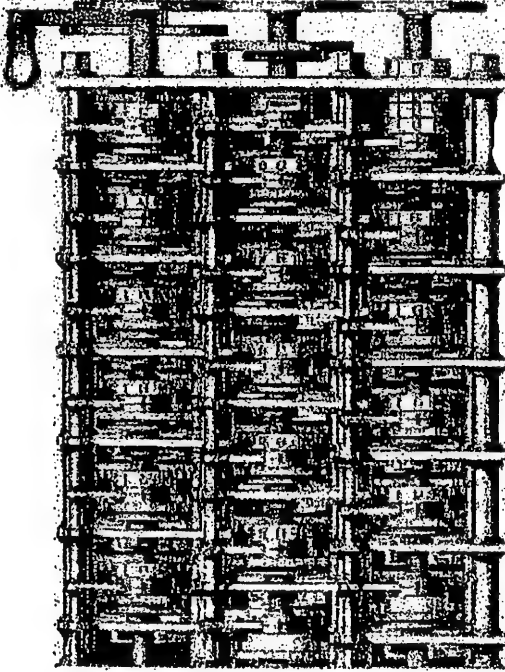
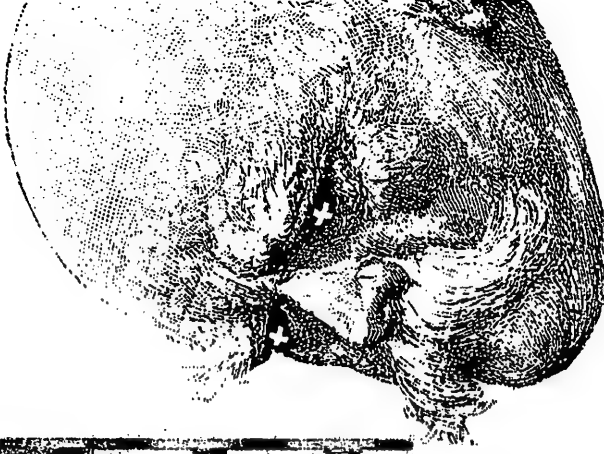


وحتى هذه الأيام يعتبر عداد أباكوس (ذو الخرزات على الأسلاك) هو أوسع جهاز عد انتشاراً. وحتى في هذه الأيام، المستخدم الماهر لهذا العداد يستطيع أن يعد الخرزات أسرع من الوقت الذي يستهلكه مشغل لوحة المفاتيح الرقمية للبحث عن المفاتيح.

وقد ظهرت آلات الحساب فى صورتين أساسيتين : آلات الجمع البسيطة وكانت تقتصر على القيام بالطرح والجمع، والآلات الحاسبة التى تتمكن من القيام ليس بالضرب والقسمة فقط

وكانت أول آلة جمع قد اخترعت بواسطة العالم الفرنسى بليه باسكال (١٦٢٣ - ١٦٦٢) فى عام ١٦٤٢ وكانت تتمكن من الجمع وحمل الباقي. وفى عام ١٦٧١ قام العالم الألمانى جوتفريد ويلهلم فون لينز (١٦٤٦ - ١٧١٦) بإنتاج جهاز يتمكن من القيام بعمليات الضرب عن طريق الجمع التكرارى.





وفي عام ١٨٢٢ قام عالم الرياضيات والمخترع الإنجليزي تشارلز باباج (١٧٩٢ - ١٨٧١) ببناء آلة جمع صغيرة . وبعد عشرة سنوات قام بتركيز تفكيره في «آلة الطرح»، والتي اعتبرت بداية الحاسب الرقمي. بعد ذلك تم توظيفه في مشروع إنشاء الموتور التحليلي» والذي لم يبن أبداً وتوجد الآن صورة منقولة عن جزء منه قد تم بناؤه، في متحف لندن العلمي.



والحسابات،
مهما كانت معقدة، لا تكفى
لحل المسائل في كل الأحيان.
في بعض الأحيان نحتاج إلى
المعادلات

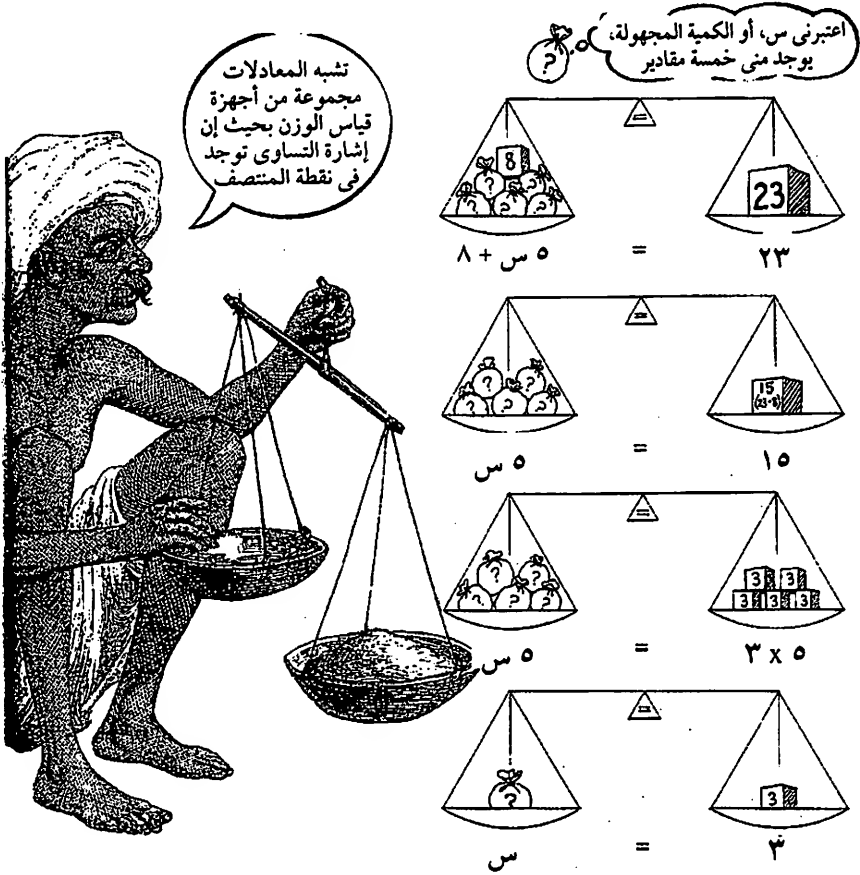
المعادلات

المعادلات هي لب الرياضيات، وهي تستخدم في كل أفرع الرياضيات البحتة والتطبيقية عدا الرياضيات البدائية جداً. وكذلك تستخدم المعادلات في العلوم الفيزيائية والحيوية والاجتماعية. وكما هو متضمن في اسمها ، فالمعادلات تنص على تساوى تعبيرين وغالباً ما تتضمن كميات غير معروفة وتسمى بعضها بالمتغيرات والبعض الآخر بالثوابت أو العوامل. وتستخدم المعادلات كذلك في تعريف الكميات المختلفة أو النص على العلاقة بين بعض المتغيرات.



وقبل اختراع المعادلات كانت المسائل الرياضية تحل بطرق معقدة بارعة جداً، والآن تم اختصارها إلى صيغة بسيطة جداً.

فى المعادلة $5س + 8 = 23$ ، س هو المجهول المطلوب حسابه ، من الممكن حساب قيمة س بطريقة التجريب والخطأ، أو بطريقة بسيطة (وهى طرح 8 من كلا الجانبين وبعد ذلك القسمة على 5).



وهذه المعادلة تتحقق أو تُحل عندما تكون س = 3 عند ذلك يكون كلا جانبي المعادلة متساويين. وعندما تكون كل قيم المتغيرات تؤدي إلى تحقق المعادلة، تسمى المعادلة فى هذه الحالة بالمتطابقة. على سبيل المثال، المعادلة (س + 2) = 2س + 2 س ص + ص 2 تسمى متطابقة لأنها صحيحة لكل القيم الممكنة للمجاهيل. وهذه المتطابقات مفيدة جداً فى المعالجة الجبرية البارة، حيث تقوم بإبدال التعبيرات المعقدة جداً بأخرى أبسط.



المعادلات الخطية
تحتوى على متغيرات مرفوعة إلى أس واحد
مثل $5س + 8 = 23$
وسميت هذه المعادلات كذلك لأنهم عندما
يتم رسمهم فى رسومات بيانية يكونون على
صورة خط مستقيم



المعادلات التربيعية
تحتوى على متغير واحد مرفوعاً للأس ٢،
هذه المعادلات لها دائماً جذران ومن الممكن أن يكونا
متساويين. على سبيل المثال: المعادلتان $س^2 = 4$ و
 $س^2 - 3س + 3 = 0$ معادلتان تربيعيتان لهما جذران (٢، -٢)
و (٢، -٢) على الترتيب. أما المعادلة
 $س^2 - 4س + 4 = 0$ فلها جذران
متساويان وهما $س = 2$



المعادلات التكعيبية
يكون فيها متغير واحد مرفوعاً للأس ٣، وهى لها
ثلاثة جذور دائماً بالرغم من أن يكون اثنان منهما أو
الثلاثة متساويين. ومن الممكن أيضاً أن يكون أحد
الجذور (أو اثنان) عدداً مركباً ولا يمكن أن يكون ثلاثة
أعداد مركبة. والمعادلة $س^3 - 6س^2 + 11س - 6 = 0$
معادلة تكعيبية لها جذور $س = 1, 2, 3$

وتسمى المعادلات الخطية والتربيعية والتكعيبية معادلات من الدرجة الأولى والثانية والثالثة على الترتيب. والمعادلات حتى الدرجة الرابعة يمكن تمثيل جذورها بصيغة رياضية تتضمن جذوراً تربيعية وبعض الحسابات مثل المعادلة $x^2 + ب س + ج = ٠$ صيغة جذورها تكون :

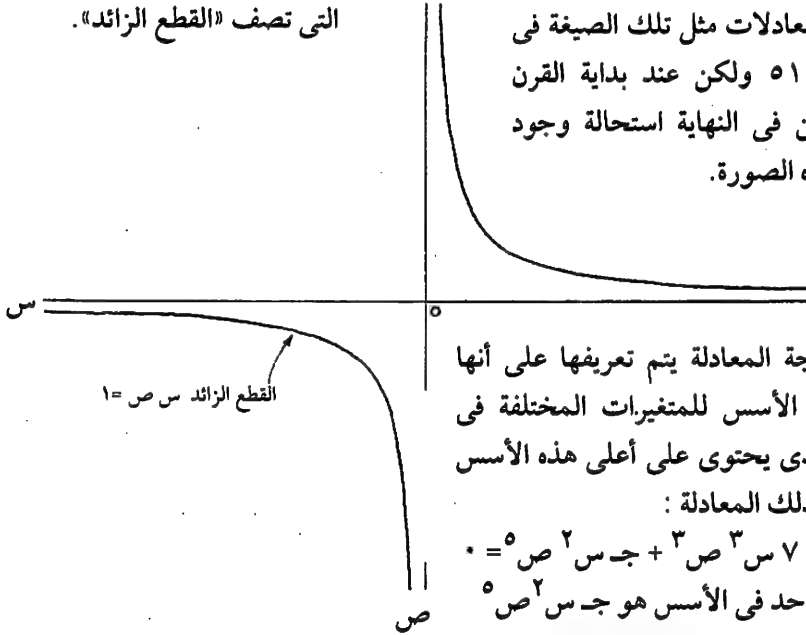
$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ ج}}{٢ أ}$$



ربما يكون المقدار
الموجود تحت الجذر التربيعي
($\sqrt{\quad}$) أقل من الصفر، في هذه
الحالة تكون الجذور على صورة
أعداد مركبة

والمعادلات من الممكن أن
تحتوى على أكثر من متغير فى أحد
حدودها، ومثال لذلك المعادلة :
س ص = ١ المعادلة الهندسية
التي تصف «القطع الزائد».

لا توجد حدود لدرجات هذه
المعادلات الجبرية ولكن هناك
حدود فاصلة عند المعادلات
الخماسية، فعلى مر العصور كانت
هناك محاولات لإيجاد صيغة لجذور
تلك المعادلات مثل تلك الصيغة فى
صفحة ٥١ ولكن عند بداية القرن
١٩ تبين فى النهاية استحالة وجود
مثل هذه الصورة.



ودرجة المعادلة يتم تعريفها على أنها
مجموع الأسس للمتغيرات المختلفة فى
الحد الذى يحتوى على أعلى هذه الأسس
ومثال لذلك المعادلة :

$$٥ + ٧ س + ٣ ص + ج س ٢ ص ٥ = ٠$$

أعلى حد فى الأسس هو ج س ٢ ص ٥





عندما تكون هناك معادلة واحدة تحتوى على متغيرين فهي غير قابلة للحل بالطبيعة، ولكن إذا كان لدينا اثنان من هذه المعادلات، من الممكن أن نقوم بحلهم لإيجاد قيم كلا المتغيرين.

وعندما يكون لدينا مجموعة من معادلتين أو أكثر فى متغيرين أو أكثر فمن الممكن حلهم آنياً بمعالجة بسيطة.
وكمثال لذلك :

$$(1) \quad 2س + س ص = 3 \quad 0 =$$

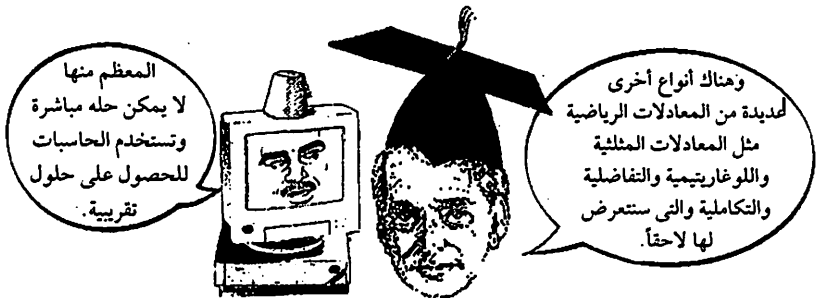
$$(2) \quad \text{بضرب المعادلة الأولى فى 2 نحصل على } 4س + 2س ص = 6 \quad 0 =$$

$$(3) \quad \text{وبطرح المعادلة الثانية من هذه المعادلة نحصل على } 3س + 6 = 0$$

$$(4) \quad \text{لذلك } س = -2$$

وبالتعويض عن قيمة س فى المعادلة الأولى نجد أن $ص = -\frac{1}{2}$

وهناك بعض المعادلات الآتية الأكثر تعقيداً من ذلك ومن الممكن أن تحل بنفس الطريقة.

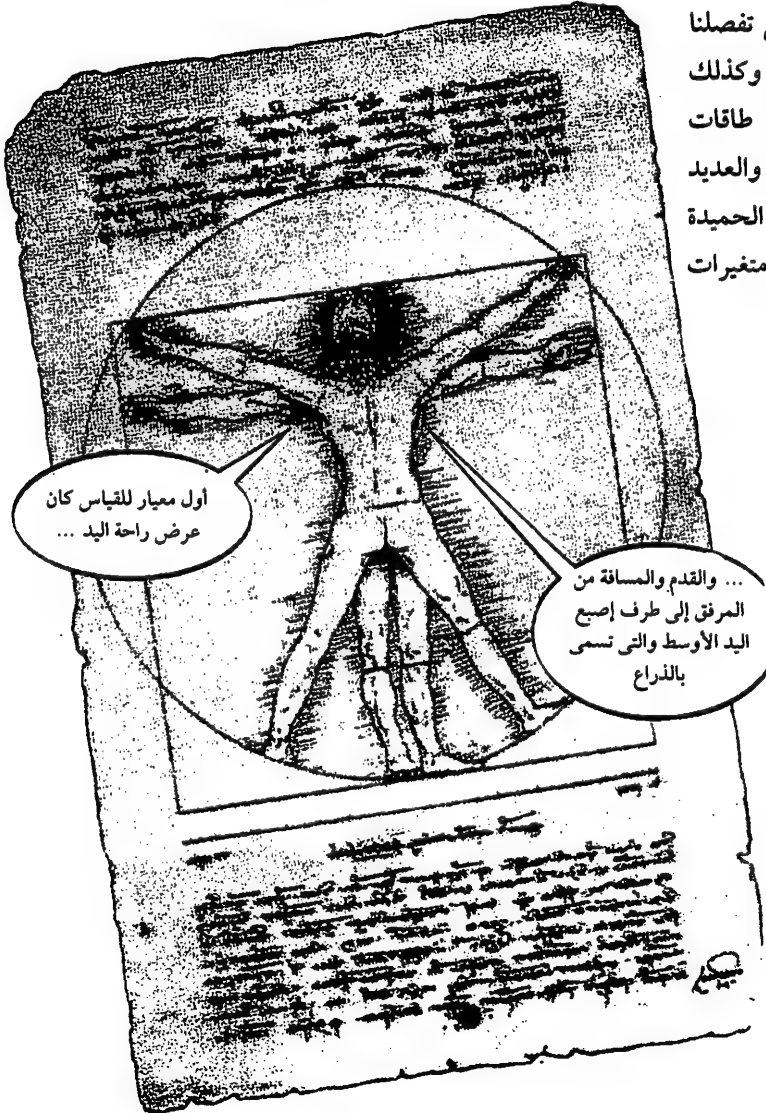


القياس



القياسات جزء مهم جداً من الرياضيات ،
فنحن نقوم بقياس كل شيء تقريباً. وتنوع
القياسات من الوقت والأبعاد والأوزان
والساعات والحجوم والكهرباء والحرارة وحتى

المسافات التي تفصلنا
عن النجوم، وكذلك
نقوم بقياس طاقات
مكونات النواة والعديد
من الأشياء الحميدة
مثل الذكاء ومتغيرات
البيئة.



وينحدر «النظام الدولي» من النظام المترى الذى وضعه الفرنسيون أثناء

فترة التطور الفرنسى. وهذا النظام يمدنا بمجموعة من الوحدات

للكميات المشتقة من الكميات

الأساسية مثل : المتر (م) للطول ،

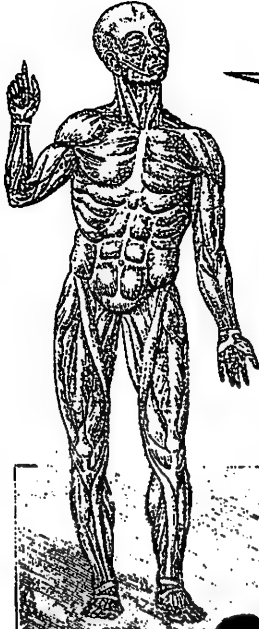
والثانية (ث) للزمن ،

والكيلوجرام (كجم) للكتلة.

ومعظم القياسات العملية يتم التعبير عنها فى صورة أسس

العشرة من الوحدة مثل المليمتر (مم) للطول ، والذى

يساوى ١٠^{-٣} من المتر.



وفى هذه الأيام تبنى
القياسات على العلم



ويشذ الوقت

من هذه القاعدة حيث

إن كل محاولات الفرنسيين

لتقسيم الشهر إلى ثلاثة عقود

مكونة من عشرة أيام ، واليوم

إلى عشر ساعات ، والساعة

إلى مائة ثانية قد باءت بالفشل

ولذلك بقى النظام الذى

اخترعه البابليون قائماً

وكل وحدة أساسية لها تعريف وطريقة قياس محددة من قبل الهيئات الدولية الرسمية، وبالطبع تتغير هذه التعريفات كلما ظهرت طرق قياس أفضل.



وبدا تعريف المتر
على أنه ١/٤٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠
من محيط الكرة الأرضية
وفي هذا القرن تم قياس المتر
عن طريق سرعة الضوء وفي
هذه الأيام يقاس بالطول
الموجي لضوء ذى
لون محدد

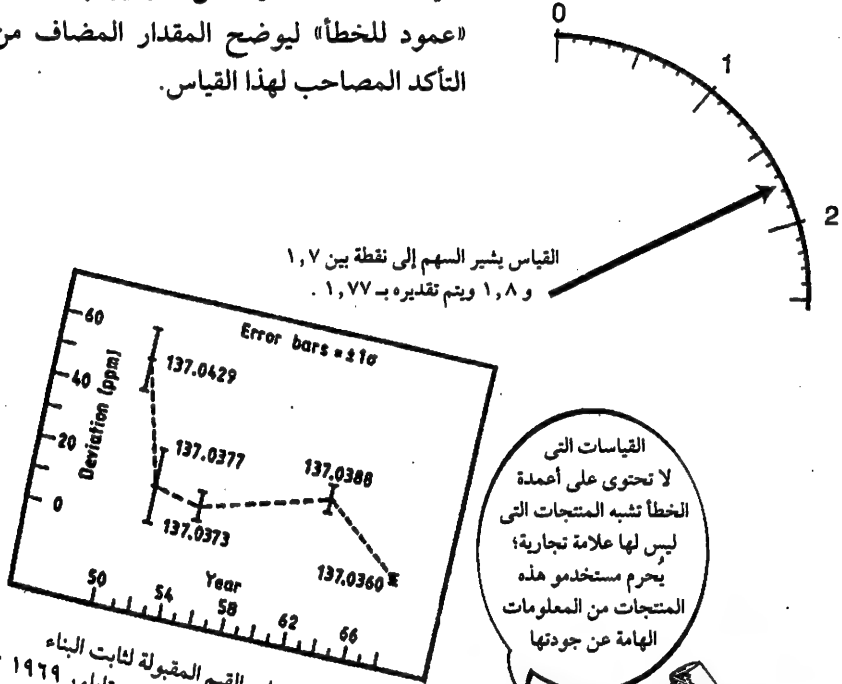
ولا تزال بعض الدول تستخدم
النظام الملكى القديم الذى يحتوى
على الرطل والياردة وثمان الجالون

وربع الجالون. ولكن مقياس ثمن الجالون وربع الجالون
والجالون الأمريكى يساوى أربعة أخماس نظيره الإنجليزى،
لذلك فإن السيارات الأمريكية التى تستهلك وقوداً أكثر بالنسبة
لعدد الأميال الأقل الذى تقطعه لكل جالون ...



ويلاحظ أن العد والحساب دائماً ما يتعلقان بأرقام منفصلة ومنفردة ، ولذلك يتضمنون أرقاماً فعلية وعلى النقيض فإن القياسات تهتم بمقادير متصلة . ولا يوجد قياس مثالي يعطى القيمة الفعلية للكمية المقاسة، فعندما تتم مقارنة الشيء الذى نريد قياسه مع معيار معين فإننا نحاول تقريب القراءات بين نقطتين على أدق مقياس. لذلك فإن كل تقرير عن

القياسات المعقدة يتضمن (أو يجب أن يتضمن) «عمود للخطأ» ليوضح المقدار المضاف من عدم التأكد المصاحب لهذا القياس.



شكل ١ تتابع القيم المقبولة لثابت البناء الدقيق $\alpha - 1$ (مأخوذ من ب. ن. تايلور ١٩٦٩ : الثوابت الأساسية والديناميكا الكهربائية الكمية ، لندن ، أكاديمي ص ٧)

القياسات التي لا تحتوى على أعمدة الخطأ تشبه المنتجات التي ليس لها علامة تجارية؛ يحرم مستخدمو هذه المنتجات من المعلومات الهامة عن جودتها

ولكنهم ظلوا يقولون هذا طول حياتهم!

ومنذ عصور ما قبل التاريخ ظلت القياسات تستخدم فى البناء والتصميم. وقد اكتشف علماء العمارة أن الآثار القديمة الباقية مثل Stonehenge كانت تقام بدقة شديدة لملاحظة بعض الأحداث الفلكية، وبالتالي كانت أساساتها تتطلب دقة هندسية فى التصميم. وكذلك تم تصميم كنائس أوروبا medieval بنسب دقيقة حتى أن نظرية النسب الإلهية كانت هى أساس المعمار والفن فى عصور النهضة.

وقد مثلت الأهرام المصرية العظيمة تحدياً أعظم لأجيال من علماء المعمار.



وتربط رياضيات
التصميم بين الرياضيات
العملية والرياضيات النظرية
التي تم التوصل إليها في
الحضارة اليونانية

إمكانية عمل
الزوايا القائمة مثل ركن
المربع تفيد جداً في
وضع الأساسات
الأرضية

كان معروفاً
عند البابليين أن هناك
بعض المثلثات
قائمة الزاوية

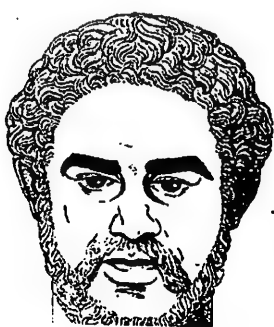
إذا كانت أضلاع
المثلث لها أطوال ٣،
٤، ٥ أو ١٢، ١٣، ١٥ فإن
الركن المقابل للضلع
الطويل يكون قائماً

توجد بين هذه الأرقام علاقة
خاصة :
حيث $٢٥ = ٢٤ + ٢٣$
وكذلك $٢١٣ = ٢١٢ + ٢٥$

ما الذي
تدعوه
مربعاً؟



وقد قام الرياضيون اليونانيون
بعمل مجموعات من هذه
الثلاثيات، عن طريق تطبيق
طرق حسابية لإيجادهم بالطبع



ولكن
اليونانيون قاموا
بوضع نظرية

الرياضيات اليونانية

منذ بداية القرن السابع قبل الميلاد قام اليونانيون بفصل استنتاج قوانين الطبيعة عن الأسئلة الدينية المتعلقة بالعلاقة بين الإنسان وآلهته. وقد قيل إن رجل الدولة الرياضى قد قام بجلب علم الرياضيات

من مصر إلى اليونان، وهذا الموقف ميز كل العلوم والرياضيات اليونانية القديمة، حيث بحث اليونانيون عن نظريات الطبيعة التى تفسر الأرض والسماء.

قمت باستكمال
الهندسة المصرية
وأعطيت توضيحات
للظواهر الطبيعية

ولكن الأرقام
ما زالت تمثل
إغراء سحرى بالنسبة
لنا نحن اليونانيين
وذلك لأنها تعكس
جمال وتماثل
الكون



فيثاغورث (٥٨٠ - ٥٠٠ ق.م)

لم أكن عالم رياضيات فقط
ولكنني قائد مدني ومؤسس العبادة
الصوفية التي تدعو إلى الزهد والتقشف
عن الأنشطة والأطعمة المختلفة

اكتشف فيثاغورث أن
النغمات الموسيقية البسيطة
تتكون بالاندماج من ألين
لهما أطوال متناسبة . يتم
اندماج الأوتار بواسطة
وترين طول أحدهما نصف
طول الآخر، أما في حالة
الخمس فتكون النسبة ٣:٢ .

أدى ذلك إلى
أن نؤمن بأن الرياضيات
تعكس جمال والوهية العلاقات
حيث تحمل الأرقام الإجابة
على أي شيء ولها
خاصية سحرية

وقد تُسب إلى فيثاغورث نظرية شهيرة تم تسميتها باسمه
والتي تنص على: في المثلث قائم الزاوية يكون مجموع مربعي
طولي الضلعين مساوياً لمربع طول الوتر أي أن $a^2 + b^2 = c^2$
ح^١ . وهذه النظرية كانت موجودة قبل فيثاغورث ولكنه هو
أول من قام بإثباتها. وبالرغم من أن هذه الرواية لم تُعرف إلا
بعد وفاته بمئات السنين، إلا أنها تبدو متوافقة مع ما هو
معروف عن فيثاغورث، حيث إنه قام بتغيير الرياضيات من
كونها مجرد دراسة عملية إلى علم له دلالات فلسفية.

Fig 103



وقد أعجب من ساروا على نهج فيثاغورث بالأشكال الهندسية المنتظمة بكلا نوعيها المضلعات والأجسام الصلبة المنتظمة والتي يوجد منها خمسة أشكال فقط، وقد ذكر في أسطورة ما أنهم واجهوا أزمة كبيرة عندما اكتشفوا أن بعض العلاقات في هذه الأشكال لا يمكن التعبير عنها في صورة نسب للأرقام. وكان أسهل هذه الأزمات هو التحقق من نسبة طول قطر المربع إلى طول ضلعه، والمعروف الآن أن ...



متناقضات "زينو"

كانت شهرتى
ناتجة عن المتناقضات التى
تحدثت بها الأساسيات التى
بنى عليها اعتقادنا عن الفضاء
والوقت والتغير

حاول زينو أن يبين أنه سواء تخيلنا أن الفضاء يمكن تقسيمه
تقسيماً نهائياً أو لا نهائياً أو سواء اعتبرنا الحركة البسيطة أو
النسبية سنصل إلى تناقض ، وقد وضع ذلك باستخدام أربعة
متناقضات.

وأشهر تلك المتناقضات هى التى تهتم بالتسابق بين أشيلس
(أفضل عداء) والسلفاة. فى قفزة واحدة يستطيع أشيلس أن
يقطع نصف المسافة التى تقطعها السلفاة ويكرر ذلك مرات
عديدة ...



باستخدام هذا التحليل كيف يمكننا تفسير تغلبه على السلفاة ؟

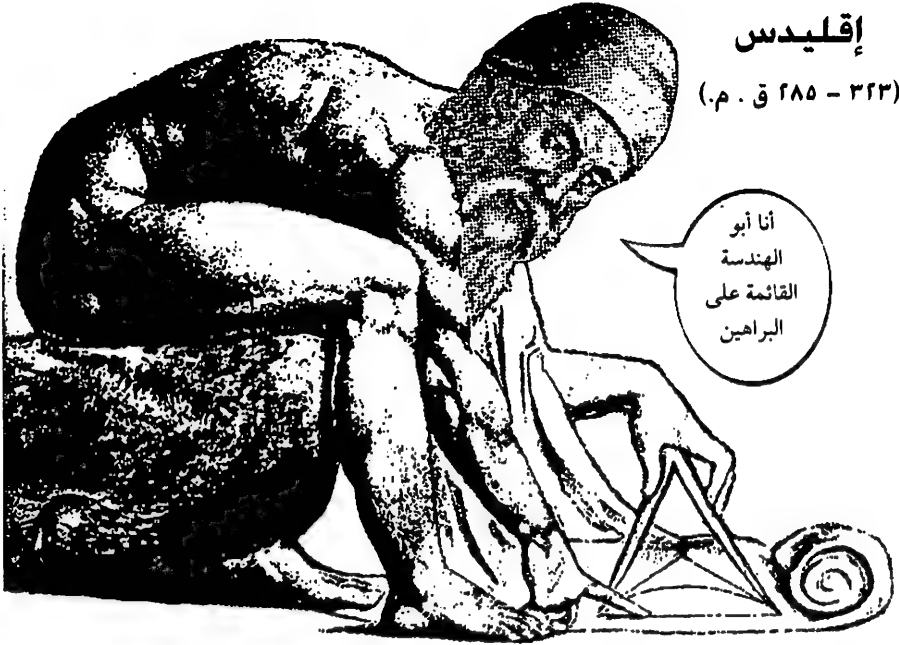
بالطبع لسنا فى حاجة إلى ذكر أنه
سيفعل ذلك بعد عدد لا نهائى من
القفزات. فى الرياضيات الحديثة لا
نستطيع التحدث عن الحد الأخير أو
اللانهاى فى متتابعة.

وهذا التناقض يوضح أننا إذا جعلنا الفضاء مقسماً تقسيمياً لا نهائياً، سنصل إلى
تناقضات فى وصف الحركة.

هناك أربعة متناقضات أخرى لزيנו عن الحركة وأخرى عن التغير بوجه عام، وإليك المثال التالي. بفرض أننا أعطينا الأوامر التالية ...

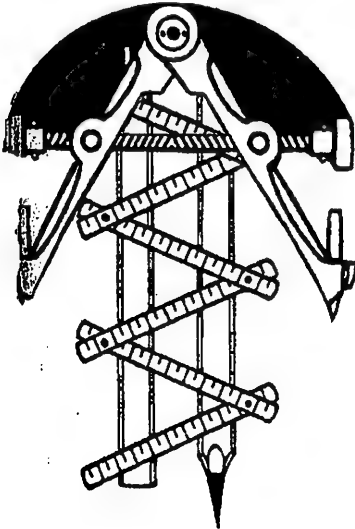


وقد قام الفلاسفة بملاحقة زيно في كل لحظات حياته ولكن مثل أشيلس لم يتمكنوا من اللحاق بفريستهم تماماً. ربما كان لدى زيно شيء يريد أن يخبرنا به عن علم الرياضيات، فنحن نحب أن يكون هذا العلم واضحاً ولكنه في الحقيقة متناقض.



كانت لأفكار إقليدس تأثيرات ضخمة على علم الرياضيات في الغرب حيث إنها تعتبر الأساس للهندسة. وقد قام بتنظيم إثباتات تقليدية مبنية على بعض «الأعمال» باستخدام بعض الأدوات المثالية مثل المسطرة والفرجار (لعمل أقواس من دوائر). باستخدام هذه الأعمال يمكنك إثبات أشياء عن هيئة الأشكال دون استخدام الأمثلة الرقمية، وكان هذا هو التغيير الكبير

في الرياضيات اليونانية - فكرة الإثبات العامة المختصرة.



وفي عمله «العناصر» قدم إقليدس أساسياته المشهورة للهندسة وقام بتعريف الأعمال المسموح بها في الإثبات (وهناك بعض الأعمال الأكثر تعقيداً والتي كانت معروفة بتحويل بعض الإثباتات الصعبة إلى صورة سهلة ولكنها لم تكن تعتبر «هندسية»). وبعد تعريف عناصره الأساسية مثل «النقطة» و«الخط» قدم إقليدس خمس ملاحظات شائعة عن الكمية وكذلك خمسة افتراضات للأعمال.

الملاحظات الشائعة :

١- إذا ساوى شيان شيئاً ثالثاً فإن الثلاثة يكونون متساوين

$$أ = ج ، ب = ج ، أ = ب$$

٢- إذا أضيفت كميات متساوية إلى كميات متساوية كان

$$الناتج متساوياً = + = =$$

٣- إذا طرحتم كميات متساوية من كميات متساوية كان

$$الناتج متساوياً = - = =$$

٤- الأشياء المتطابقة تكون متساوية ☺ = ☺

٥- الكل أكبر من الجزء **الكل**

الافتراضات :

من المسلم به أنه في المستوى :

١- يمكن رسم الخط بين أى نقطتين .



٢- يمكن مد أى خط من كلا الجانبين بدون حد.



٣- يمكن رسم دائرة بأى نصف قطر حول أى مركز .



٤- كل الزوايا القائمة متساوية.



٥- الخطان اللذان يقطعان خطاً ثالثاً بحيث كان مجموع الزوايا

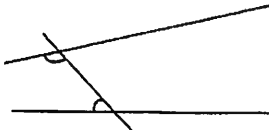
الداخلية أقل من زاويتين قائمتين يجب أن يتقاطعا في نقطة . وأول

ثلاث نقاط تعرف أعمالاً أما الاثنان الباقيان فهما نظريات.

الافتراض الخامس يسمى «افتراض التوازي» وقد ظل هذا

الافتراض تحدياً للرياضيين من بعد إقليدس. وفي الواقع فإن هذا

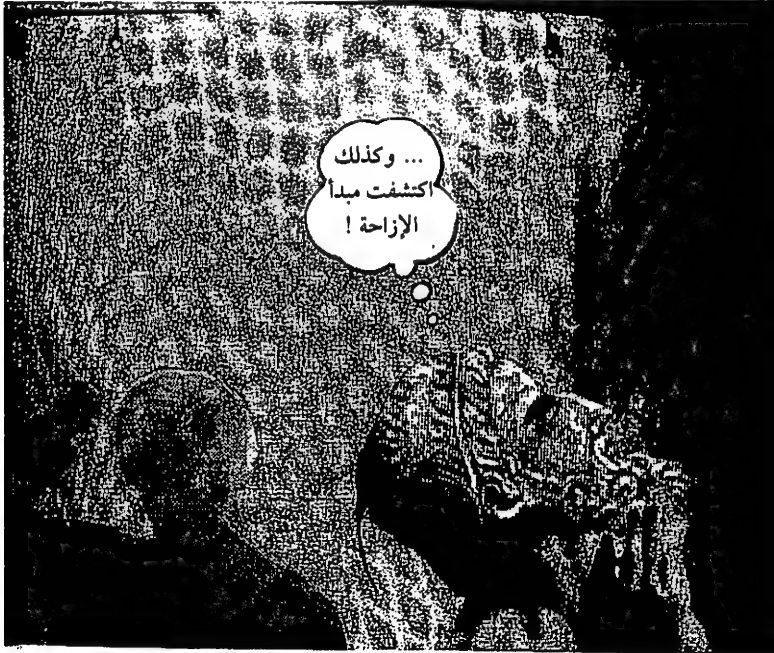
الافتراض يعتبر المفتاح الذى يصف نوعين مختلفين من الهندسة.





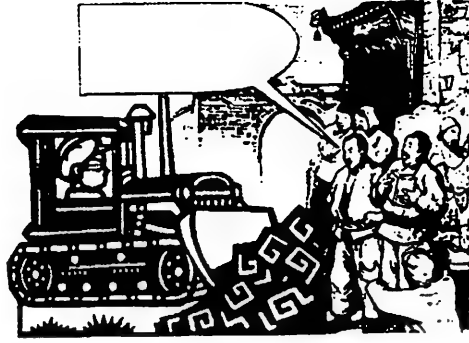
وباستخدام هذه الأساسات اتجه إقليدس لإثبات كل النتائج الهندسية في عصره وحتى نظرية فيثاغورث. وبغض النظر عن صعوبة مسلماته (والتي اعتبرت فيما بعد أنها حقائق ذاتية الإثبات، وكذلك الاستنتاجات الناتجة عنها تم التعامل معها على أنها حقائق أيضاً). وقد تم التعامل مع الهندسة على أنها مثال عظيم للمعرفة الحقيقية التي يمكن الوصول إليها بالعقلانية الإنسانية وحدها.

وجاء بعد إقليدس رياضى عظيم جداً وهو أرشيميدس (٢٨٧ - ٢١٢ ق.م.). وضع أرشيميدس طرقاً لقياس مساحة الأشكال الدائرية وكذلك مساحة سطح الأجسام المنحنية مثل الكرة والأسطوانة، وقد استنتج قيمة تقريبية لـ π ...



الرياضيات الصينية

لم يَقم الصينيون باستخدام الإثباتات الثابتة التي وجدناها في «عناصر إقليدس» وذلك لأنهم لم يُعجبوا بالمنطق الثابت. كان الصينيون، مهتمين بالتطبيقات العملية للأفكار ولم يدرسوا الرياضيات من أجل الرياضيات. وبالطبع لم يمنعهم ذلك من وضع



إثبات للمثلث القائم الزاوية والذي كان مختلفاً تماماً عن نظرية فيثاغورث. وعلى عكس اليونانيين لم ينزعج الصينيون من الأرقام الصماء (وهي تلك الأرقام التي لا يمكن التعبير عنها على صورة نسبة بين رقمين صحيحين أو الأرقام غير النسبية). ولتمييز الأرقام السالبة - على سبيل المثال - استخدم الصينيون سيقاناً حمراء بدلاً من اللون الأسود !

وقد قام الصينيون بالتدريب على الجبر دون استخدام رموز بكتابة كل أفكارهم في صورة كلمات. وقد استخدموا لوحة للعد في الجبر وكذلك في كل الاكتشافات الرياضية الأخرى. وقد طور الصينيون عن طريق العالم صنج ديناستي (٩٦٠ - ١٢٧٩) بعض الملحوظات للتعامل مع المعادلات حتى الأس التاسع. وقد استطاع الصينيون حل المعادلات الآنية الخطية (في مجهولين أو أكثر) وكذلك المعادلات التربيعية.

○凡二至九乘位者用此置物爲實以價爲法呼九九合數口
十就身言如隔位從末位算起用九歸還原

九因

圖右左實法別分

實 法

式盤算初

左 右

萬 千 百 十 兩 錢 分 一 十 百 千 萬

實之首位 實之末位 法之首位 法之末位

爲前位上位 爲次位下位 爲母 爲子

動 靜

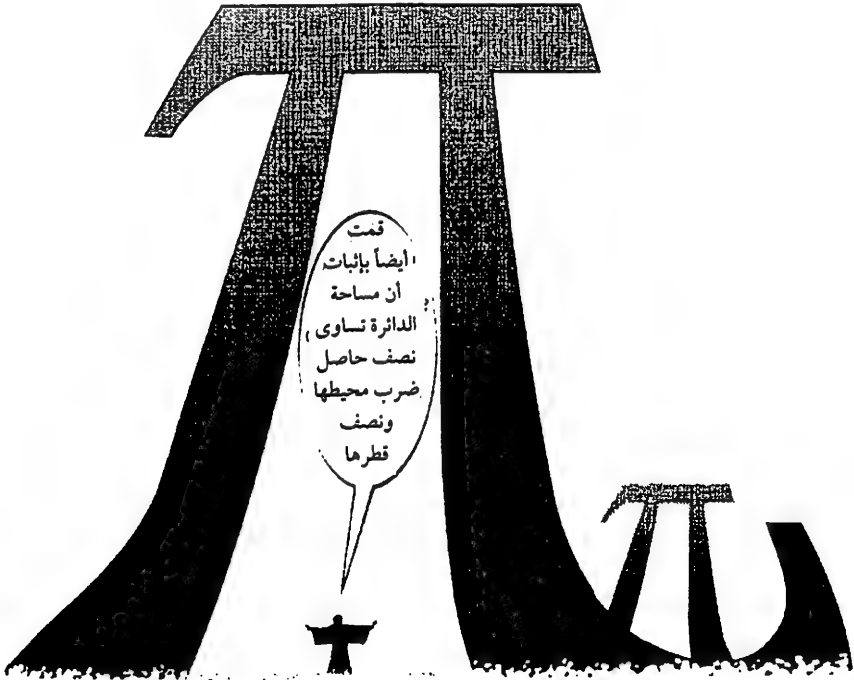
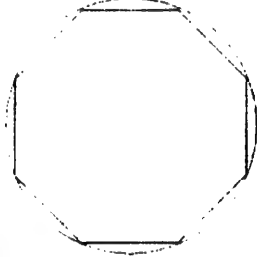
新安 賓集程大位汝思甫 編

原本直指算法統宗卷之二

وقد اهتم الصينيون أيضاً بالمربعات السحرية التي يتم ملء خاناتها بأرقام عندما تُجمع تعطى نفس الرقم، ويطبق هذا على الصفوف الرأسية والأفقية والقطرية أيضاً. واخترع الصينيون مكعبات ثلاثية الأبعاد لها نفس الخاصية. وظل الصينيون متشوقين للبحث عن قيمة دقيقة لـ «ط». وقد استنتج «ليو هوى» (وهو أحد علماء الرياضيات القدماء في الصين) قيمة لـ «ط»

4	9	2
3	5	7
8	1	6

حتى أربع علامات عشرية. وبني ليو هوى طريقته على «طريقة الاستنزاف» حيث من الممكن وضع مضلع داخل الدائرة وعن طريق زيادة عدد أضلاعه حتى تصل أطوالها إلى حد من القصر يمكننا معه مساواة المضلع بالدائرة.



وفي القرن الخامس بعد الميلاد قام الفريق المكون من الأب والابن تسو تشونج تشيه وتسو كنج تشيه بالحصول على قيمة لـ ط تساوي ٣, ١٤١٥٩٢٦ و ٣, ١٤١٥٩٢٧. لم يتم التوصل لهذا الرقم في العالم الغربي حتى القرن السابع عشر.

تشيو تشانج

هو أشهر كتاب في الرياضيات الصينية، ولا نعرف من كتبه ولا متى تمت كتابته بالتحديد ولكنه يفترض أنه يعود إلى آخر سلالة «تشين» أو بداية سلالة «هان» (القرن الأول بعد الميلاد).

وهذا الكتاب يغطي الموضوعات التالية :

心算不容已既不能放下他又不能輕動着他所以

去(一)孟子說孩提之童無不知愛其親也只看孩提

此書之價值在於其內容之豐富與方法之簡便

• مراجعة أساسية (مع قواعد الجمع والطرح للكسور) والنسب (النسب المئوية).

• التوزيع النسبي (المتواليات الهندسية والحسابية بالإضافة إلى قاعدة الثلاثة).

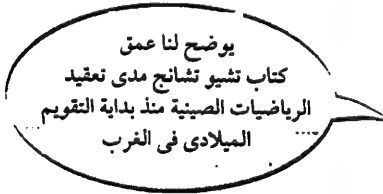
• قياسات أولية (إيجاد الجذور التربيعية والتكعيبية بطرق هندسية).

• دليل المهندسين (حجوم الأجسام ثلاثية الأبعاد).

... ..

هذا بالإضافة إلى أجزاء أخرى عن الضرائب وبعض الألغاز وطرق الجدولة.

父母便一時也難過文王難過



أربعة علماء رياضيات صينيون

يعتبر آخر القرن الثالث عشر وبداية القرن الرابع عشر هي فترة أقصى ازدهار للرياضيات الصينية. وقد عاش خلال هذه الفترة أربعة من أشهر علماء الرياضيات في الصين.



وكان هناك أكثر من ثلاثين مدرسة رياضيات عبر الصين وكانت الرياضيات مادة إلزامية في اختبارات الخدمة الوطنية العامة.

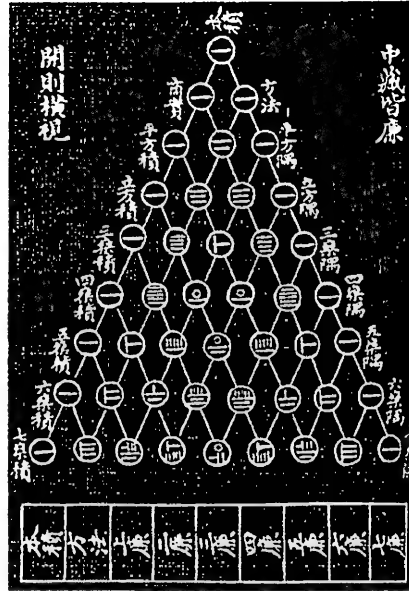
ويعتبر العالم تشين تشاو واحداً من أعظم علماء الرياضيات الصينيين على الإطلاق وقد عمل في الخدمة العسكرية والمدنية وكان كتابه تسعة قطاعات من الرياضيات يتضمن بعض الأفكار الجديدة وقدم تحليلاً غير معروف من قبل (وهو دراسة المسائل التي لها حلول على هيئة أرقام صحيحة).

وقد درس كُلُّ من «يانج هوى» و «تشو شيه تشيه» التباديل والتوافق بين التعبيرات وتوصلوا إلى ما نسميه الآن بنظرية ذات الحدين. وتتضمن هذه النظرية ضرب مقدارين مكونين من حدين مثل (س + ١) و (س + ٣) والذي يعطى ناتجاً س٢ + ٤س + ٣ = ٠

وكلما ازداد عدد المقادير المضروبة ببعضهما ازداد عدد الحدود فى الحل النهائى مثل :

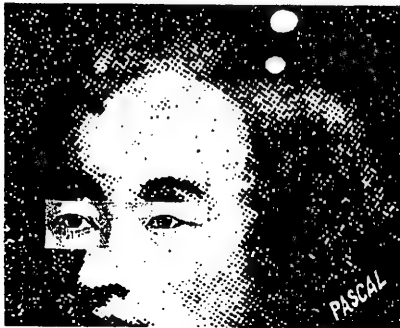
$$(س + ١)(س + ١)(س + ١) = (س + ١)^٣ = س٣ + ٣س٢ + ٣س + ١$$

وقد قاد هذا عالمى الرياضيات للعمل فى ما نعرفه الآن بمثلث باسكال. فقد اكتشفا أنه إذا



الأس ١
الأس ٢
الأس ٣
الأس ٤
وهكذا.....

لاحظ أحدنا الأرقام المصاحبة للسينات يظهر نموذج معين. بالنسبة للأس الأول (مثل (س + ١)) هذه الأرقام هى ١ ، ١ ؛ وبالنسبة للأس ٢ (مثل (س + ١)²) تكون الأرقام ١ ، ٢ ، ١ ؛ وبالنسبة للأس ٣ (مثل (س + ١)³) تكون الأرقام ١ ، ٣ ، ٣ ، ١ ؛ وهكذا. وقد تم تخطيط هذه الأرقام فى نفس الصورة التى صممها باسكال فى القرن السابع عشر.



باسكال

وقد استُخدم مثلث باسكال فى حساب الاحتمالات. على سبيل المثال يعطى النصف الثانى التباديل المختلفة عند رمى قطعتى نقود. فهناك احتمال واحد أن تظهر صورتان واحتمالان أن تظهر صورة وكتابة ، واحتمال واحد لظهور كتابتين.



وقد تم توضيح ذلك بواسطة عالم الرياضيات تشيا هسين (١١٠٠ ميلادية) وربما تكون ظهرت قبل ذلك.



تعتمد الرياضيات الهندية (شأنها شأن الرياضيات الصينية) على كل الإثباتات المتنوعة متضمنة التحققات المرئية والتي لم يتم إرجاعها إلى أى نظام استدلالى تقليدى. وقد تطورت الرياضيات الهندية من النظام الذى طوره علماء المنطق وعلماء اللغة الهنديون. وقد تطورت الرياضيات فى الهند فى أربع مراحل واضحة. مرحلة (الهاريبان) من ٢٥٠٠ ق.م. إلى ١٠٠٠ ق.م. وتضمنت الرياضيات الأولية باستخدام الأحجار، إلخ.

وتلى هذه المرحلة فترة «فيديك» والتي استمرت لمدة ١٠٠٠ عام والتي اهتمت بهندسة الطقس. وخلال هذه الفترة بدأت «الجنسية» و«البوذية» فى الظهور. ثم تلى ذلك الفترة التقليدية والتي استمرت تقريباً حتى عام ١٠٠٠ ب.م. وقد اهتم الرياضيون فى هذه الفترة بتطوير المبادئ القديمة مثل الأرقام والخوارزميات والجبر.



قصيدة من أعمال عالم الرياضيات الهندى باسكارا (انظر الصفحة المقابلة)

والمرحلة الأخيرة فى الرياضيات الهندية هى فترة القرون الوسطى «لمدرسة كيرالا» والتي انتهت فى القرن السادس عشر حيث تم تطوير أفكار أكثر ذكاءً، وسبب انتهاء هذه المدرسة فى كيرالا غير معروف تماماً. وعلى أية حال فقد أثرت مدرسة كيرالا كثيراً فى الرياضيات الأوروبية حيث إن الاكتشافات الرياضية فى أوروبا كانت معروفة مسبقاً لدى علماء الرياضيات فى كيرالا قبل ذلك بحوالى ثلاثة قرون.

هندسة القيـدا (١)

كان هندوس فيديك معجبين جداً بالأرقام الكبيرة التي كانت تشكل جزءاً من المسؤولية الدينية لديهم. فعلى سبيل المثال عند مناقشة أمر مثل القربان كانت تذكر أرقام مثل ١٠٠٠٠٠ مليون. وكان هناك اعتقاد كبير بالأرقام التي تزداد على صورة مضاعفات العشرة، وكلما ازداد الرقم أصبح أكثر إثارة.

وهندسة مذبح الكنيسة تعطينا تصوراً للجبر عند هندوس فيديك. فطبقاً لأحد الأنظمة كان مذبح الكنيسة يأخذ شكل شبه منحرف ذي ضلعين متساويين . ويتم زيادة أو إنقاص أطوال الأضلاع بالناسب مع الطقوس المختلفة. وهناك طقوس مختلفة تتطلب عدم تغير أطوال أضلاع معينة بينما تزداد أو تنقص أطوال أضلاع أخرى.

وقد مكن هذا القادة الدينيين من المسائل الرياضية التي تتطلب حلولاً جبرية. وقد تم وضع قواعد لهذه العمليات والأسئلة التي تأخذ في اعتبارها عدد الأحجار المستخدمة في هذه التغيرات. وتقدير عدد الأحجار المستخدمة في هذه العملية بحيث لا تتقابل الصدوع في الطبقات المتتالية أدى إلى استخدام المعادلات الآتية.



(١) القيـدا : هى مجموعة الكتب المقدسة فى الديانة الهندوسية، وكلمة القيـدا سنسكريتية تعنى «المعرفة»، ولم يبق منها سوى أربعة أسفار. (المراجع).

وقد حسب الرياضيون الهنود قيمة ط لأقرب أربع علامات عشرية.

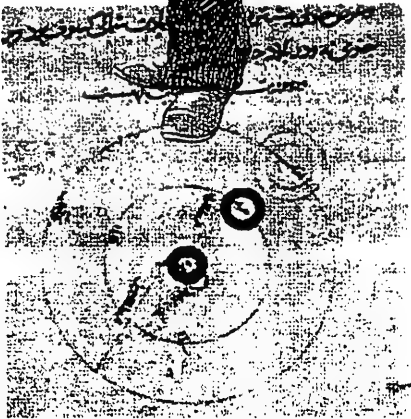
الطريقة الهندية المعتادة لإيجاد مساحة الدائرة أو حجم الكرة ...



... تتكون من تقسيم
المساحة أو الحجم إلى
عناصر أصغر ثم يتم
جمعهم.

يتم تقسيم الكرة - على سبيل المثال - إلى الكثير من
الأهرام الصغيرة بهدف جمع أحجامهم بنفس «طريقة
الاستنزاف» التي استخدمها أرشيميدس وقد احتوت هذه
الطريقة على مبادئ العلم الذي عُرف فيما بعد باسم
«التكامل» وقد استخدم الهنود هذه الطريقة في الفلك من
أجل حساب سرعة ومواقع الكواكب. وعلى سبيل المثال

كان للتنبؤ بالكسوف شأن ديني عظيم.
حيث يكتسب عالم الفلك الذي يستطيع
التنبؤ بذلك بدقة احتراماً عظيماً. ويعتقد
بعض علماء تاريخ الرياضيات الهندية أن
هذا هو البداية الحقيقية لعلم «التفاضل
والتكامل».



براهما جوبتا

وظهر الجبر في فترة براهما جوبتا (٥٩٨) (وهو أحد أعظم علماء الرياضيات في الهند) على أنه فرع منفصل من الرياضيات. وقد كتب براهما جوبتا أبحاثاً غطى فيها بعض النقاط مثل الجذور التربيعية والتكعيبة والكسور وقاعدة الثلاثة والخمسة والسبعة وغيرها والمقايضة. وخلال هذه الفترة تم تقسيم المعادلات إلى أنواع ما زالت تعرف حتى الآن: البسيطة Yavat-tavat والتربيعية varga والتكعيبة ghana والتربيعية الثنائية varga - varga. وقد اهتم براهما جوبتا بالمعادلات الخطية ذات المجاهيل وكذلك المعادلات التربيعية. وكان لبراهما جوبتا العديد من المعلقين الذي نقلوا أفكاره عبر السنين.



ومثل باقي العلماء الهنود
فقد أحب براهما جوبتا
الأرقام غير النسبية مثل $\sqrt{2}$
وحدد قيمتها لدرجة عالية
جداً من التقريب.

ارقام "جاین"

اهتم هنود جاين شانهم شأن هندوس فيديك بالأرقام الكبيرة وكانت لهم طريقة منفردة للتشكير في هذه الأرقام. فقد اقترحوا أن هذه الأرقام تنقسم إلى ثلاث مجموعات وهي المعدودة والغير معدودة واللاتهائية. وكل مجموعة تنقسم إلى ثلاث مجموعات. فالمجموعة الأولى على سبيل المثال تنقسم إلى الأرقام القليلة والمتوسطة والكبيرة. أما المجموعة الثانية فتقسم إلى غير معدودة تقريباً وغير معدودة حقيقياً وغير معدودة غير معدودة. أما المجموعة الثالثة فهي تقريباً لا نهائى ولا نهائى حقيقى ولا نهائى لا نهائى. ولم تعرف أوروبا قدر هذه الأرقام إلا منذ قرن مضى من خلال أعمال كانتور.

1,000,000,000,000

قام أحد علماء الرياضيات التابع
لجماعة جاكين وهو ناها فيراشارنا
(١٩٥٠) باستخدام الأرقام السالبة في
أعماله وذكر الصفر على أنه

الرقم الذي إذا قسم
على صفر لم يتغير.

يجب أن يكون
ما لا نهاية.

اندماجات فيديك وجاين

كان كل من فيديك وجاين الهنود مغرمين بالتعامل مع الاندماجات. وأحد مصادر هذا الاهتمام كان قصائد فيديك الشعرية وتغيراتها. وكان بعض هذه الأبيات مكوناً من ٦ مقاطع وبعضها من ٨ أو ٩ ، ١١ أو ١٢. وكان التحدي هو تغيير الأصوات الطويلة والقصيرة في كل مجموعة مقاطع وإيجاد الاندماجات المختلفة المتاحة. وقد أدى هذا البحث إلى العديد من مسائل التبادل. على سبيل المثال: الروائع التي تنتج من خلط ١٢ مادة في صورة منفردة أو ثنائيات أو ثلاثيات في نفس الوقت.



الشعر الرياضي

تم تناقل الأفكار الرياضية الهندية في صورة الشعر. ويشيع وجود الألغاز الرياضية في الشعر حتى الآن، وأحد الألغاز الرياضية الشعرية هو :



الإجابة هي ٢٨ . وإذا أراد أحد
أن يحصل عليها فعليه أن يقوم بها بطريقة
عكسية لما هو مذكور في اللغز لذلك
نقوم بالترتيب $\times ١٠$ ، -٨ ،
() $٢ +$ ، ٥٢ ، الخ



ها هي طريقة الحل : $[(٢) (١٠) - ٨] \times ٢ + ٥٢ =$
١٩٦

بعد ذلك $\sqrt{١٩٦} = ١٤$
ثم $٢٨ = \frac{(١٤) (٢/٣) (٧) (٧/٤)}{٣}$ الإجابة

وفي هذه الأيام نعبّر عن الإجابة بدس ونكتب :
 $٢ = ٣ \sqrt{(٣) \times \frac{٤}{٧} \times \frac{٢}{٣} - ٢ (٥٢ + ٨)}$

وبدون خلط فإن هذا التعبير المعقد يكافئ تماماً
التعبير القديم وللحصول على حل نجعل س
نصب أعيننا ونحاول أن نجعلها في طرف وحدها
لنحصل على قيمة لها في الطرف الآخر.



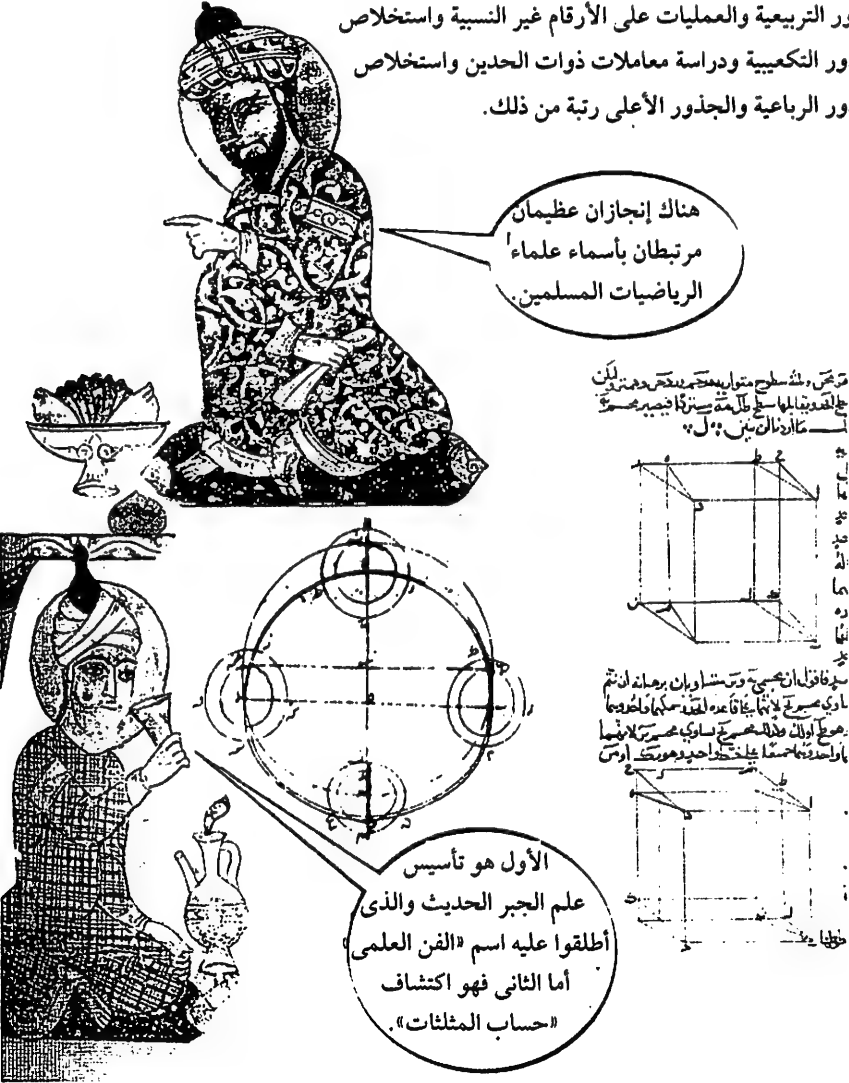
راما نوجان

يحتوى التاريخ الهندى على العديد من الرياضيين البديهيين فعلى سبيل المثال كان «سرينفازا راما نوجان» (١٨٨٧ - ١٩٢٠) فاشلاً أكاديمياً ولكنه كان عالم رياضيات لامعاً. وقد اعتمد راما نوجان على المذهب التصوفى والميتافيزيقا وكذلك الأفكار التجريدية فى دراسة الرياضيات . وكانت طريقة الوصول إلى النتائج العميقة الذكية (وبالمناسبة الخطأ) خارج نطاق فهم أى أحد وكان نصيره فى انجلترا عالم الرياضيات ج.هـ. هاردى والذي زاره ذات مرة بينما كان مريضاً فى أحد المستشفيات.



الرياضيات الإسلامية

قام المسلمون بتوحيد الفكر الرياضى فى كل الحضارات السابقة لهم ، حيث قاموا بدمج الجبر والعلاقات الحسابية البابلية والهندية والصينية بالعلاقات الهندسية اليونانية والإغريقية. ونتيجة لذلك كان علماء الرياضيات المسلمون على درجة عالية من الجرأة فى التعامل مع العمليات الحسابية على الأرقام الصحيحة والكسور وكذلك استخدام وتحويل الأرقام العشرية والسداسية أيضاً استخلاص الجذور التربيعية والعمليات على الأرقام غير النسبية واستخلاص الجذور التكعيبية ودراسة معاملات ذوات الحدين واستخلاص الجذور الرباعية والجذور الأعلى رتبة من ذلك.



الخوارزمي

محمد بن موسى الخوارزمي (توفي عام ٨٤٧) هو مؤسس علم الجبر الذي نعرفه في أيامنا الآن. وقد أتت كلمة الجبر من عنوان كتابه «كتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة». وتشتق كلمة خوارزم من اسمه. وقد وضع الخوارزمي كيفية اختصار أى مسألة إلى واحدة من ست صيغ قياسية باستخدام عمليتين الأولى تعرف بالجبر والثانية هي المقابلة. وتهتم الطريقة الأولى (الجبر) بنقل الحدود لحذف الكميات السالبة (مثل $س = ٤٠ - ٤$ س تصبح $٥٠ + س = ٢٩ + ١٠$ س تقوم المقابلة باختصارها إلى $س = ٢١ + ٢ = ١٠$ س).

والمقابلة هي العملية التالية وهي عبارة عن موازنة الكميات الموجبة المتبقية (لذلك إذا كان لدينا

كتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة
المؤلف محمد بن موسى الخوارزمي


هذا كتاب وضعه محمد بن موسى الخوارزمي

في هذا الكتاب لم يستخدم الخوارزمي أية رموز كما نستخدم الآن وقام بالتعبير عن الرياضيات بصورة كلمات وباستخدام الكلمات قام باكتشاف حلول للمعادلات التربيعية ووضع المعادلة العامة

أ س + ٢ ب س + ج د = ٠
والتي لها حل

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ ج}}{٢ أ}$

قابلنا هذا قبل ذلك في ص ٥١



تطوير الجبر

وقد شرع علماء
الرياضيات المسلمون
بتأنٍ في العمل على المجاهيل
بمساعدة كل الأدوات الحسابية
تماماً كما يتعامل خبراء
الحساب مع المعلومات.

نحن نعرف أن الجبر له هدف مزدوج،
الأول هو التطبيق التقليدي للمعاملات
الحسابية الأولية بصورة تعبيرات جبرية،
والثاني هو دراسة التعبيرات الجبرية بغض
النظر عما تمثله وذلك لكي نكون قادرين
على تطبيق العمليات العامة المطبقة
على الأرقام على تلك التعبيرات.

الصموغل (المتوفى عام ١١٧٥)
كان الصموغل هو أول من كتب
النتائج الجبرية في صورة رمزية.

كان أيضاً قادراً على
التعامل مع الأرقام السالبة
والتي اعتبر أن لها كينونة
خاصة.



وقد قام عمر الخيام (المتوفى عام ١١٢٣) بمناقشة إيجاد
الجزور من الدرجات الرابعة والخامسة والسادسة والأعلى من
ذلك بطريقة اكتشافها والتي لا تتضمن استخدام الهندسة
ولكنها مكافئة لمثلث باسكال. وكان اكتشافه هذا معاصراً
لاكتشاف المشابه في الصين.



اكتشاف حساب المثلثات

قدم علماء الرياضيات المسلمون النسب المثلثية الستة الأساسية وامتدادهم في حل مسائل حساب المثلثات.

وقد حل حساب المثلثات الحديث محل الطريقة غير البارة لاستخدام الأوتار (المبنية على قطاعات من الدائرة) التي استخدمت بواسطة عالم الفلك اليوناني العظيم Ptolemy (١٠٠ - ١٧٠) ويتم تعريف هذه الدوال بواسطة أضلاع المثلث القائم الزاوية، والمسمون بـ «م» للضلع المقابل لزاوية ما و «ج» للضلع المجاور لها و «و» للوتر، وهذه الدوال هي جا = $\frac{ج}{و}$ ، جتا = $\frac{ج}{و}$ ، وظا = $\frac{ج}{ج}$ وقد نتج منه هذه التعريفات البسيطة عالم غير مصدق من العلامات. وقد كان حساب المثلثات عبارة عن أعظم تطور هام للرياضيات والفلك والعلوم العملية مثل مساحة الأراضي وبناء الحصون.

والدوال الثلاثة الأخرى هي عبارة عن مقلوب الدوال الأولى وهي :

$$\text{قتا} = \frac{1}{\text{جا}} = \frac{و}{م} ، \text{قتا} = \frac{1}{\text{جتا}} = \frac{و}{ج} ، \text{ظا} = \frac{1}{\text{م}} = \frac{ج}{م}$$



البطاني

قام البطاني (المتوفى عام ٩٢٩) بإنتاج عدد من العلاقات المثلثية والتي تتضمن :

$$\frac{\text{ظا أ}}{\text{جتا أ}}$$

$$\text{قا أ} = \sqrt{1 + \text{ظا أ}^2}$$

وقام كذلك بحل المعادلة $\text{جا س} = \text{أ جتا س}$ مكتشفاً بذلك المعادلة

$$\frac{\text{أ}}{\text{جا س}} = \text{جتا س}$$

فمت أيضاً
بإستخدام فكرة المماس
أو الظل (التي قدمها المروازي
(المتوفى عام ٩٠٠) لأول
مرة) لتطوير معادلة
حساب ظل الزاوية ومقلوب
الظل. وكذلك فمت بتجميع
جدول لمقلوب الظل.



أبو وفا

استنتج أبو وفا (المتوفى عام ٩٩٨) العلاقات التالية :

$$\text{جا (أ + ب)} = \text{جا أ جتا ب} + \text{جتا أ جا ب}$$

$$\text{جتا أ} = ١ - \text{جا أ جتا أ}$$

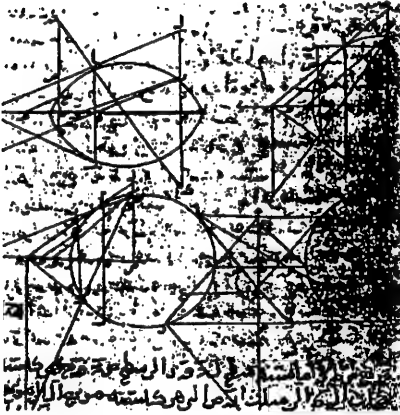
$$\text{جا أ} = ١ - \text{جتا أ جتا أ}$$

وكذلك اكتشف صيغة الجيوب للهندسة الكروية

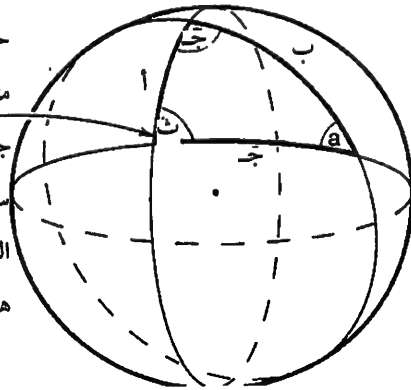
$$\frac{\text{جا أ}}{\sin \hat{\text{أ}}} = \frac{\text{جا ب}}{\sin \hat{\text{ب}}} = \frac{\text{جا ج}}{\sin \hat{\text{ج}}}$$



كانت أعماله نافعة جداً لدرجة أنها عبرت أوروبا كلها خلال فترة النهضة . قمت أيضاً بإعداد جداول مثلثية جديدة وطورت طرق حل بعض مسائل المثلثات الكروية



حيث أ، ب، ج هي أطوال أجزاء الدوائر التي تكون مثلثاً على سطح الكرة مقدرة بالدرجات أما أ، ب، ج فهي الزوايا المقابلة لها. ويتم عمل الدوائر على سطح الكرة بواسطة المستويات التي تمر بمركز تلك الكرة. (في هذه الأيام تتبع الطائرة العابرة للقارات هذه الدوائر حيث إنها تعتبر أقصر مسافة بين نقطتين).



ابن يونس وثابت بن قرة

قام ابن يونس المتوفى عام ١٠٠٩ بتحقيق الصيغة التالية :

$$\frac{1}{4}(\text{جنا} + \text{أ}) = (\text{جنا} + \text{ب}) - (\text{أ} - \text{ب})$$

وبالرغم من أنها مبنية أساساً على علم المثلثات إلا أنها مكتننا من تحديد قيمة لحاصل الضرب على صورة مجموع. وفي الوقت الذي كانت فيه عملية ضرب رقمين مكونين من عدد كبير من الخانات تعتبر عملية مملة كانت هذه المعادلة موفرة للجهد بطريقة كبيرة ، بعد ذلك أعطت هذه الصيغة بواذر نشأة اللوغاريتمات والتي قامت بنفس المهمة بصورة مباشرة، أيضاً أدت هذه الصيغة إلى الصيغة الأساسية لحساب المثلثات الدائرية المستخدم في هذه الأيام من خلال معادلة جيب التمام.

$$\hat{\text{جنا}} = \hat{\text{جنا}} \hat{\text{ب}} + \hat{\text{جنا}} \hat{\text{ج}} + \hat{\text{جنا}} \hat{\text{أ}}$$

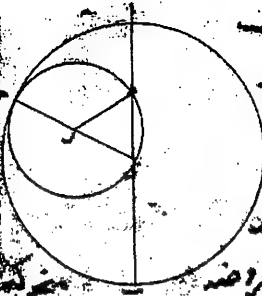
(حيث أن أ هو طول الضلع الدائري و أ هي الزاوية المقابلة له).

كتب ثابت بن قرة (المتوفى عام ٩٠١) في نظرية الأرقام واستخدامهم في وصف النسب بين الكميات الهندسية وهي خطوة لم يخطها اليونانيون أبداً.



الطوسي

بن المراد من الدائرة الصغيرة مدارة



خط مستقيم ذهاباً وإياباً يمكن
تمثيلها على هيئة تراكب حركتين

تأثرتين. وقد مكن هذا البحث

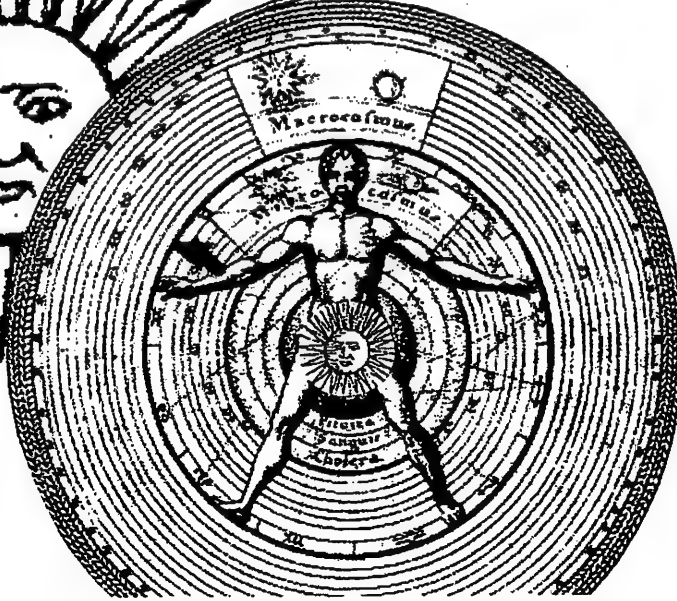
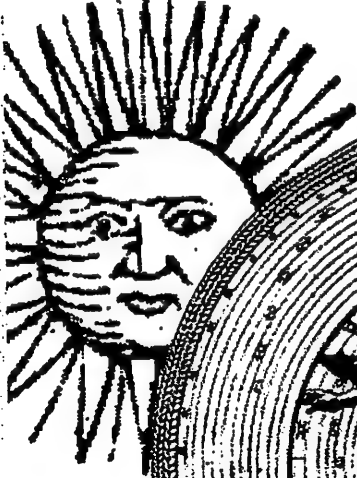
العالم نيقولاس كوبرنيكوس (١٤٧٣ - ١٥٤٣) من تمثيل حركة
الكواكب المعقدة على هيئة حركة دائرية مركبة وذلك سهل عليه إنشاء
نظام فلكي يتركز حول الشمس وليس الأرض.

يعتبر ناصر الدين الطوسي (المتوفى عام
١٢٧٤) أفضل العلماء في مجال حساب
المثلثات بنوعيه المستوي والكروي.
ومعالجته المبنية على الفهم لتحليل المثلثات
الكروية تعتبر واحدة من الدراسات المؤسسة
لتطوير علم الرياضيات. وقد أسس أزواج
طوسي والتي وضع من خلالها أن الحركة في

خط مستقيم ذهاباً وإياباً يمكن

تمثيلها على هيئة تراكب حركتين

تأثرتين. وقد مكن هذا البحث



حل المسائل التى تتضمن أرقاماً صحيحة

ظلت المسائل التى لها حلول عبارة عن أرقام صحيحة شائعة على مر القرون، فهذه هى الأرقام التى يفهمها التلاميذ. ومثال تلك المسائل هو مسألة الوراثة :



وتم التوصل لأول تقريب لهذه المسائل بواسطة ديوفانتوس (٢٧٥) وكان علماء الرياضيات المسلمون على درجة عالية من النشاط فى تطوير هذا العمل. وكانت نقطة البدء الطبيعية هى أرقام فيثاغورث مثل ٣، ٤، ٥ والتى تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية، وتم تعميم هذه العلاقة وقام العلماء المسلمون بالبحث عن حل صحيح للمعادلة $s^2 + n^2 = c^2$. وكان هناك العديد من علماء الرياضيات من قاموا بإثبات استحالة حل هذه المعادلة ومن ضمن هؤلاء كان فيرمان لو الذى سميت هذه المسألة باسمه. وقام العلماء التاليين باكتشاف بعض الأخطاء التى بينت أن هذه المسألة صعبة جداً بالفعل !

نشأة الرياضيات الأوروبية

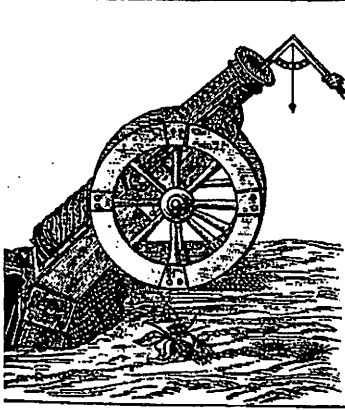
اعتمدت الرياضيات الأوروبية في تطورها على المساهمات من كل الحضارات الأخرى، فخلال العصور الوسطى كانت أوروبا أقل شأنًا من الحضارات الأخرى في كل نواحي التقنية والعلوم والثقافة . وقد بدأت في اللحاق بالركب عن طريق الاحتكاك الثقافي أثناء الحملات الصليبية ومن خلال الحوار بين العلماء في كل من أسبانيا وإيطاليا. وقد تم نقل وترجمة الأعمال العربية سواء إذا كانت مترجمة من اليونانية أو أعمالاً أصلية وذلك بواسطة فرق عمل متضمنة الوساطة اليهودية في بعض الأحيان.



ومن بقايا هذه العملية الأسماء العلمية التي تبدأ بـ "ال" مثل الجبر والكحول (Algebra & Alcohol). وقد تم إعادة اكتشاف العلاقات الفيثاغورية من الرياضيات الفنية والصوفية خلال عصر النهضة في القرن الخامس عشر.



الاكتشافات والفتوحات والحروب الدينية
كانت هي الفكرة العظيمة في هذا العصر



وكانت الرياضيات لها دور أساسي في الإبحار في
أعالي البحار وتم تطبيقها في كثير من المجالات مثل الدفاع
(تصميم الحصون) والهجوم (مصابط المدفعية) في داخل
الأوطان. وكانت المجالات مثل حساب المثلثات هامة جداً
لنجاح هذه المغامرات، وقد تم تقدمها في كلا المجالين
التجريبي والنظري.

هذا بالإضافة إلى التطور المتتابع للعلوم التجارية والتي تطلبت تحسين طرق المحاسبة. وقد دعت الكنيسة في البداية لاستخدام الأرقام العربية والاحتفاظ بالكتب ذات اللغتين (العربية والأوروبية على سبيل المثال). وكان ذلك لا يحتاج إلى تبرير ولكنه أمر واجب القبول. وفي هذه الأيام أصبحت هذه الأمور هامة جداً لدرجة يصعب معها إهمالها أو تجاهلها.

وقد صاحب تطور الرياضيات الأوروبية في المجال النظري بعض الأزمات والمتناقضات. فقد أصبحت الأرقام السالبة والأرقام غير النسبية (والتي نادراً ما أزعجت الصينيين والهنود والمسلمين) على درجة عالية من الصعوبة بالنسبة لعلماء الرياضيات الأوروبيين حتى أثناء استخدامهم بنجاح باهر. وفي الحال أدت هذه المتناقضات إلى ظهور مجالات جديدة من الرياضيات ...



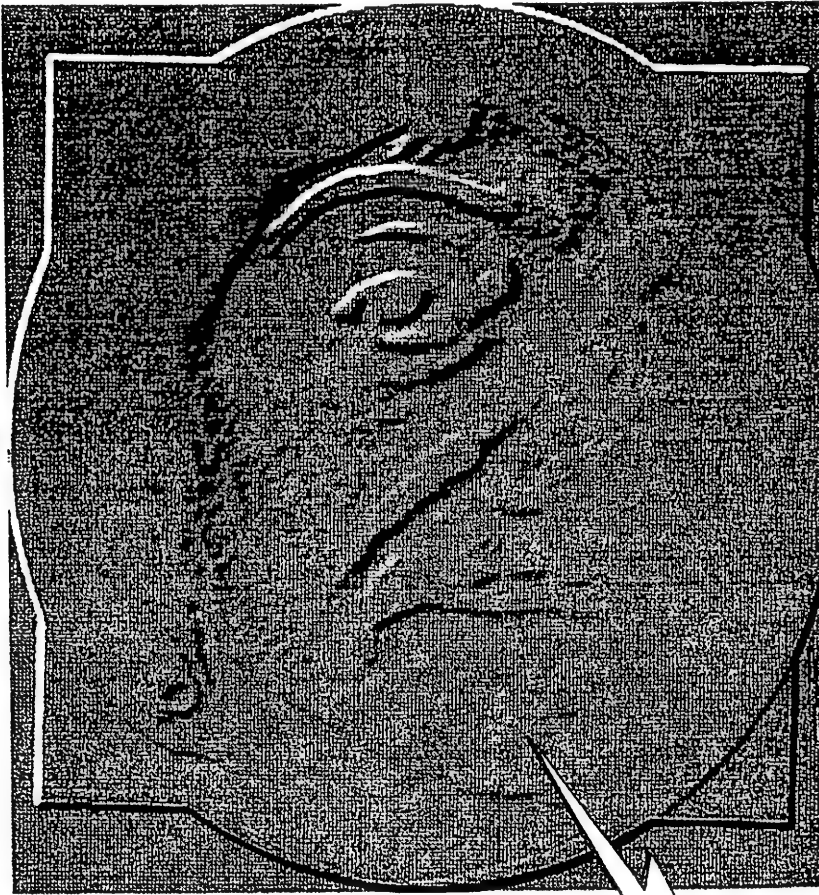
رينيه ديكارت

ويلاحظ أن أعظم مبتكر أوروبي في الرياضيات هو الفرنسي رينيه ديكارت (١٦٥٠ - ١٦٥٠) والذي كان فيلسوفاً أيضاً. ومن خلال أبحاثه الشخصية في التأكد تحول من تعلم الأدب الإنساني إلى متابعة الرياضيات، ولكنه في البداية كان محبطاً.



لماذا كان ديكارت على هذه الدرجة العالية من الاستخفاف بالجبر لدرجة أنه أراد أن يحسنه؟ حسناً، فقد كان الجبر مصاعاً جزئياً في خلال القرن السادس عشر، فقد كانت هناك بعض النقاط العامة ذات الأسماء المختصرة التي لم تكن على درجة وصف واضحة ولا حتى تمت معالجتها بطريقة بارعة. ولكن بالنسبة لعلماء الرياضيات في ذلك الوقت كانت هناك أمور أسوأ، فقد وجدوا أنفسهم يقومون بوصف أشياء تافهة أو سيئة!

لقد ذكرنا سابقاً الأرقام التخيلية، وهي جذور المعادلات مثل $س٢ + ١ = ٠$ ، إلى
 أى نوع من الأرقام تنتمى هذه الأرقام ؟
 فنحن لا نستطيع عد الأشياء بواسطة هذه الأرقام. أيضاً ما هى الكميات الفيزيائية
 التى يعطى مربع قياسها كميات سالبة ؟ هذا يعنى أنه يلزم التعامل مع هذه الأرقام
 بمعالجة بارعة لبعض القواعد، وفى النهاية لا توجد دواعى قلق من كتابة الهراءات مثل
 تلك !



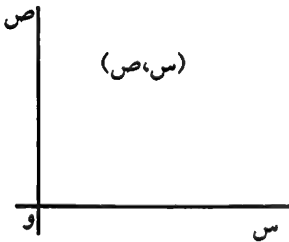
وفى الحال
 ظهرت متناقضات
 أخرى !

الهندسة التحليلية

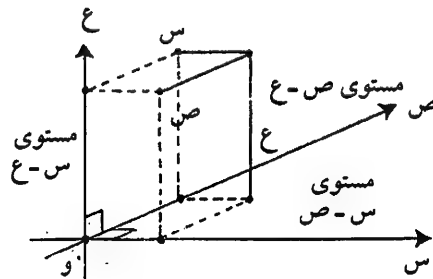
ظهرت الهندسة التحليلية أو هندسة الإحداثيات كنتيجة لمجهودات ديكارت. وتبنى الهندسة التحليلية على فكرة أن أى نقطة فى الفراغ يمكن ...



فى الهندسة المستوية يوجد محوران متعامدان نطلق عليهما «محور س» و«محور ص». ويمكن تحديد موقع أى نقطة فى المستوى بواسطة إحداثياتها (س، ص) والتي تعطى المسافة بين تلك النقطة ونقطة الأصل على المحور بين س و ص ، ونقطة الأصل هى نقطة تقاطع المحورين.



أما فى حالة الثلاثة أبعاد فيوجد ثلاثة محاور متعامدين تبادلياً وهم محور س و ص و ع



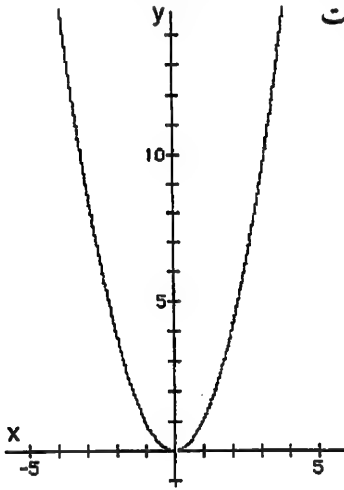


يمكن تمثيل
أى شكل على محوري
س، ص نقطة بنقطة



بالإضافة
لذلك يمكنك تمثيل
العلاقة بين إحداثيات
أى نقطة بواسطة
معادلة

وأبسط شكل يمكن تمثيله هو الخط المستقيم الذى يوصف بواسطة المعادلة
الخطية $ص = أ س + ب$ حيث أ، ب ثوابت



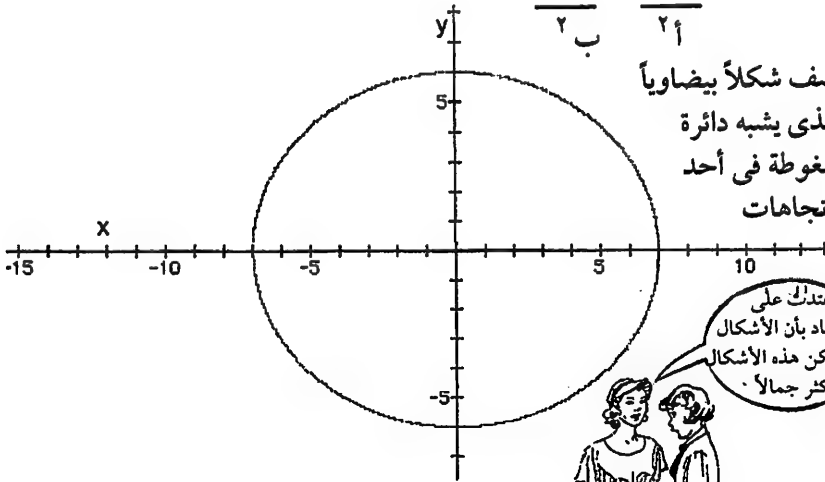
والمعادلة $ص = س^2$
نصف القطع المكافئ

... الذى يزداد
سريعاً لأعلى ..



$$١ = \frac{ص^2}{٢} + \frac{س^2}{٢}$$

فتصف شكلاً بيضاوياً
والذى يشبه دائرة
مضغوطة فى أحد
الاتجاهات

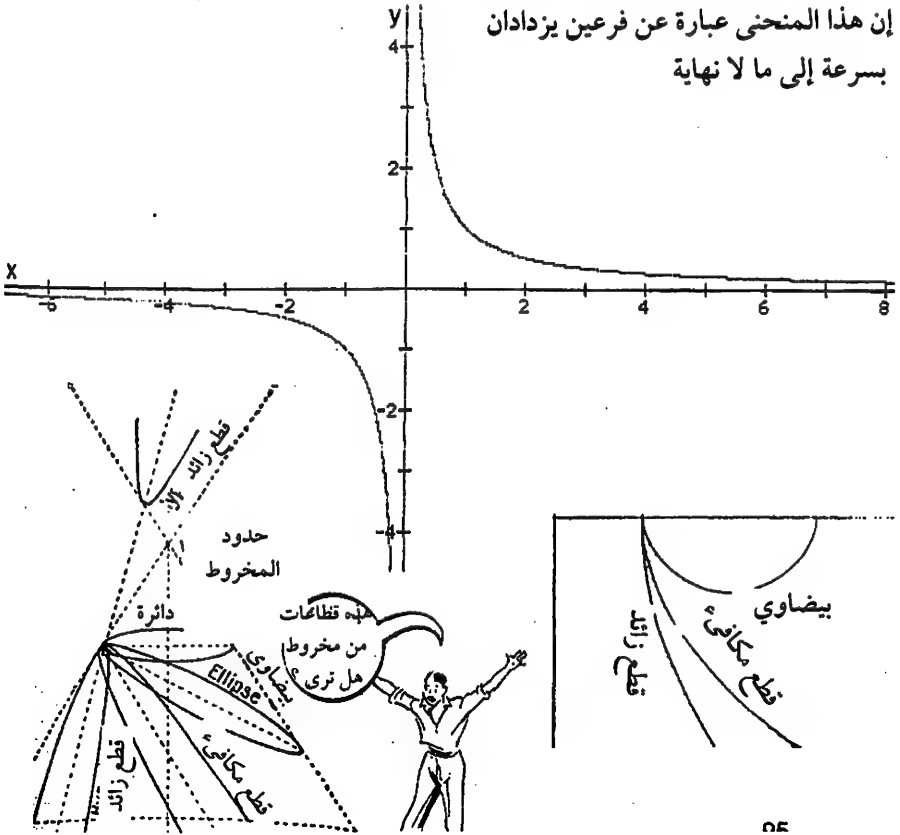


اعتدك على
الاعتقاد بأن الأشكال
مملة ولكن هذه الأشكال
أكثر جمالاً ..





... وهي القطع الزائد الذي يتم تمثيله بواسطة المعادلة $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1$. وإشارة السالب هي التي تقوم بكل أشكال الاختلافات حيث إن هذا المنحنى عبارة عن فرعين يزدادان بسرعة إلى ما لا نهاية

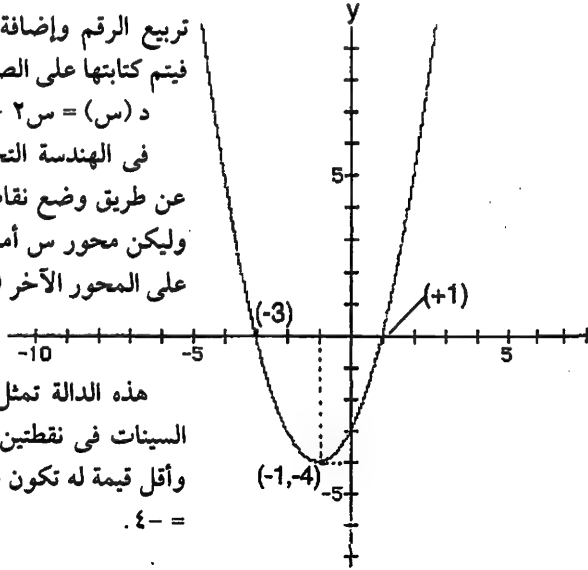


الدوال

تقوم الدوال بإظهار صورة اعتماد أو علاقة متغير ما بمتغير أو متغيرات أخرى، فنقول إن v هي دالة في s أو أن v هي دالة في s و v . (نستخدم الحروف في آخر الأبجدية للتعبير عن المتغيرات، أما تلك في بداية الأبجدية فتعبر عن الثوابت في غالب الأحيان كما استخدمهم ديكارت).



لذلك إذا كانت قاعدة تعريف الدالة هي :
تربيع الرقم وإضافة ضعفه إليه ثم طرح ثلاثة
فيتم كتابتها على الصورة
 $d(s) = s^2 + 2s - 3$
في الهندسة التحليلية يتم رسم هذه الدالة
عن طريق وضع نقاط s على أحد المحاور
وليكن محور s أما قيم الدالة المناظرة فتكون
على المحور الآخر (محور v).



هذه الدالة تمثل قطعاً مكافئاً يقطع محور
السينات في نقطتين $s = 1$ و $s = -3$
وأقل قيمة له تكون عند النقطة $s = -1$ و $v = -4$.

أبسط الدوال
هى الدوال
الثابتة

وتأخذ هذه الدوال الصورة د (س) = أ .

وهذا يعنى أنه بغض النظر عن قيمة س

فإن الدالة دائماً تساوى أ .

دالة القوى
تأخذ الصورة د (س)
= س^ن حيث إن ن
(رقم اختيارى)
ولكنه ثابت

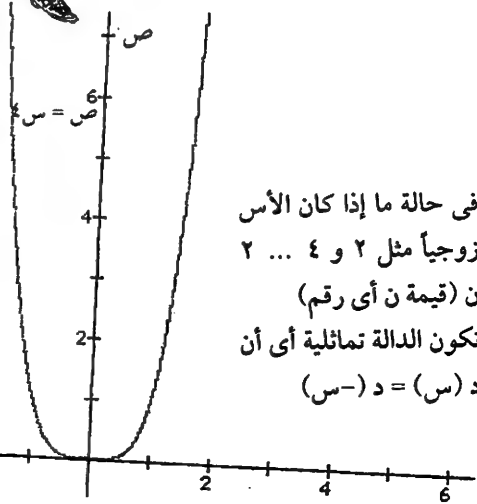


الدالة

د (س) =

س^٢ هى مثال

لدالة القوى



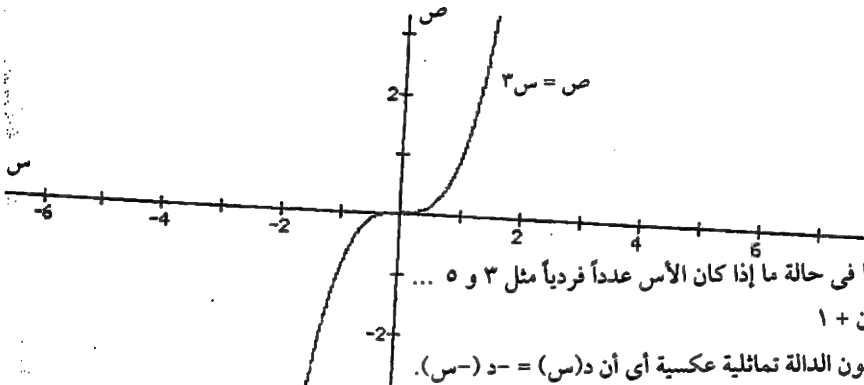
فى حالة ما إذا كان الأس

زوجياً مثل ٢ و ٤ ... ٢

ن (قيمة ن أى رقم)

تكون الدالة تماثلية أى أن

د (س) = د (-س)



أما فى حالة ما إذا كان الأس عدداً فردياً مثل ٣ و ٥ ...

٢ن + ١

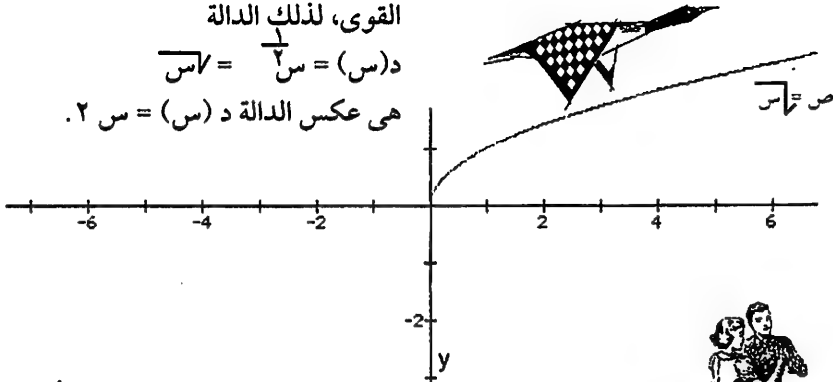
تكون الدالة تماثلية عكسية أى أن د (س) = - د (-س) .

الدالة الجذرية هي عبارة عن «عكس» دالة

القوى، لذلك الدالة

$$د(س) = \sqrt[3]{س} = \sqrt[3]{س}$$

هي عكس الدالة د (س) = س^٢.



الدالة كثيرة الحدود يتم تمثيلها بواسطة عدد من الثوابت أ ، ب ، جـ ،

و ، ... ومتغير واحد س الذي يتغير في أسسه. لذلك الدالة كثيرة

الحدود من الممكن أن تأخذ الصورة

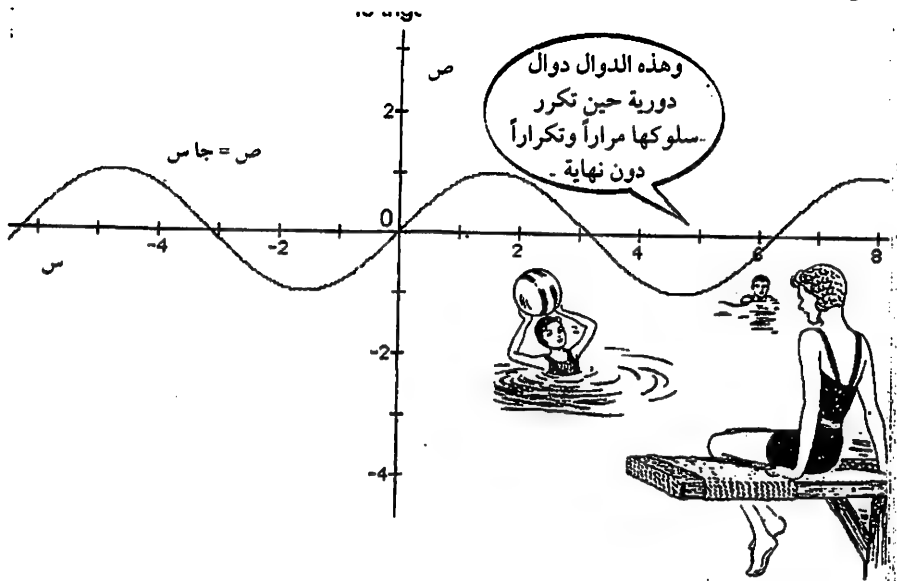
$$د(س) = أ س^٣ + ب س^٢ + جـ س + د .$$



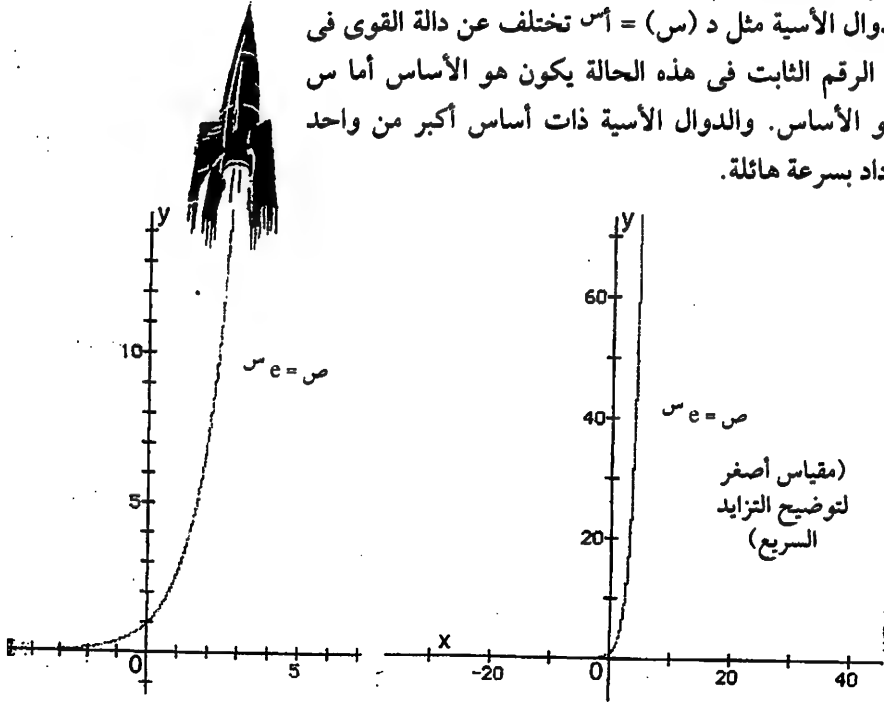
فيما وراء ذلك توجد
دوال «مبهمة»

... التي تفوق عالم
العمليات الجبرية

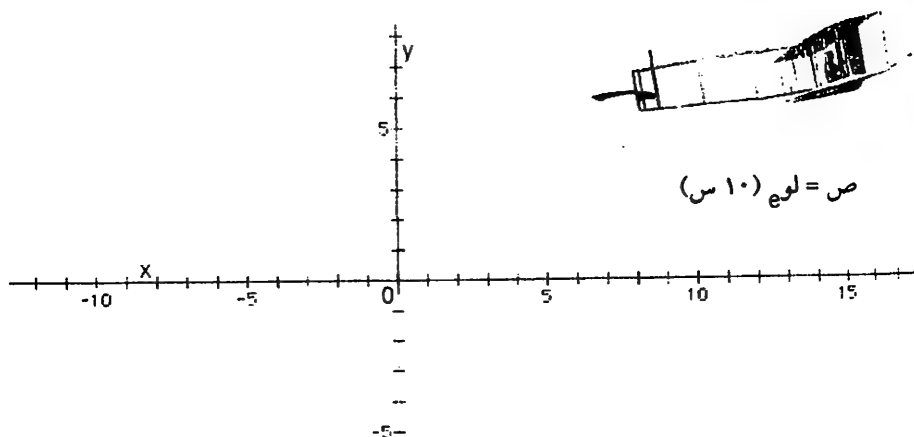
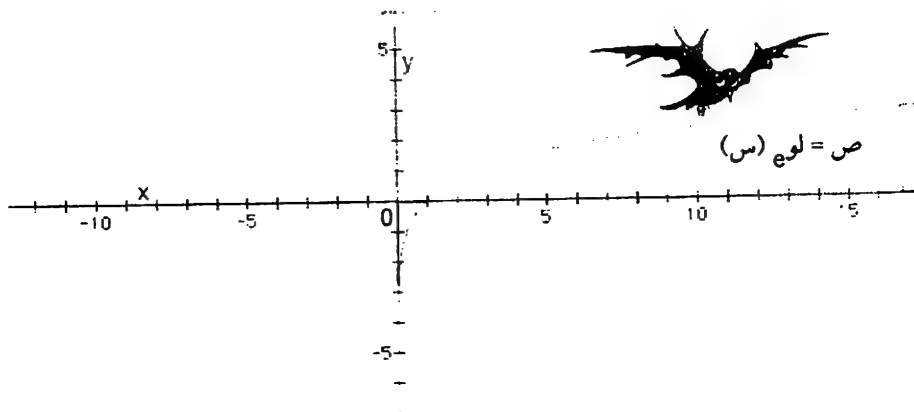
أما الدوال المثلثية فتستخدم النسب المثلثية مثل جا وجنا، وأحد هذه الدوال هي د (س) = جا س



الدوال الأسية مثل د (س) = e^s تختلف عن دالة القوى في أن الرقم الثابت في هذه الحالة يكون هو الأساس أما س فهو الأساس. والدوال الأسية ذات أساس أكبر من واحد تزداد بسرعة هائلة.



الدوال اللوغارتمية هي عكس الدالة الأسية وتكتب على الصورة د(س) = لو_ب(س) ؛
ويسمى الرقم أ أساس اللوغاريتم. وتتزايد هذه الدوال تزايداً بطيئاً جداً. ومثال تلك
الدوال : لو_{١٠}(س) = لو_{١٠}(س) + لو_{١٠}(١٠)



واللوغاريتمات التي نستخدمها في الجداول لها أساس عشرة.
وفي الكمبيوتر (والذي يعمل بالحسابات الثنائية المبنية على
الرقمين صفر وواحد) يكون الأساس المناسب هو اثنان. وفي
حالة الرياضيات النظرية فإن الأساس المفضل هو :

$$ث = ٢,٧١٨٢٨٠٠٠$$

وهذا هو «أبو كل الأساسات» والذي يمثل الدالة الأسية
د(س) = e^س والتي لها معدل تزايد مساو تماماً لحجمها.

الدوال هي
أدوات التحليل
الرئيسية التي
تستخدم في
التفاضل
والتكامل



التفاضل والتكامل



كانت أعمال ديكارت هي أوج عملية تحرير الجبر من الكلمات ، تماماً مثلما فعلت الهندسة اليونانية من تحرير الإنشاءات من الأرقام. وقد انطلق تطور الجبر بمجرد أن وضع ديكارت صيغة لوصف العلاقات الجبرية . وخلال أربعين عاماً من نشر الهندسة الجبرية لديكارت قام العالم الرياضى الفيلسوف الألماني جونفريد ويليام فون لينز (١٦٤٦ - ١٧١٦) بابتكار جبر للانهاية. وهذا هو ما نسميه التفاضل والتكامل وهو أداة فعالة فى تحليل النمو والتغير بصفة عامة.



مكان الجسم المتحرك : س
السرعة أو الجريان : س'

نيوتن

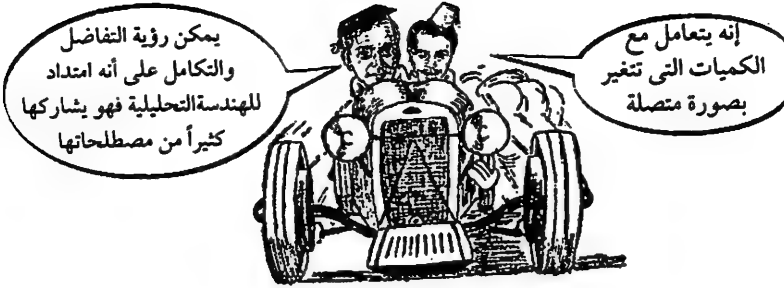
المتغير س
الدالة د (س)
المنحنى ص = د(س)
ميل المماس = المشتقة
د(س) = $\frac{د ص}{د س}$
المساحة تحت المنحنى بين
نقطتين س = أ و س = ب
د (س) = $\frac{د ص}{د س}$
لينز

أما السير إسحق نيوتن (١٦٤٢ - ١٧٢٧) فقد قام باكتشاف مماثل لذلك فى فترة سابقة نوعاً ما ولكنه قام فقط باستخدام ملاحظات ديكارت فى صورة موسعة بدلاً من الإضافة إليه لذلك فإن الصورة التى وضعها لينييز للتفاضل والتكامل هى الصورة السائدة هذه الأيام. لذلك فإن الفيلسوفين ديكارت ولينييز هما اللذان وضعوا الأفكار والملاحظات التى شكلت الرياضيات بعد ذلك.



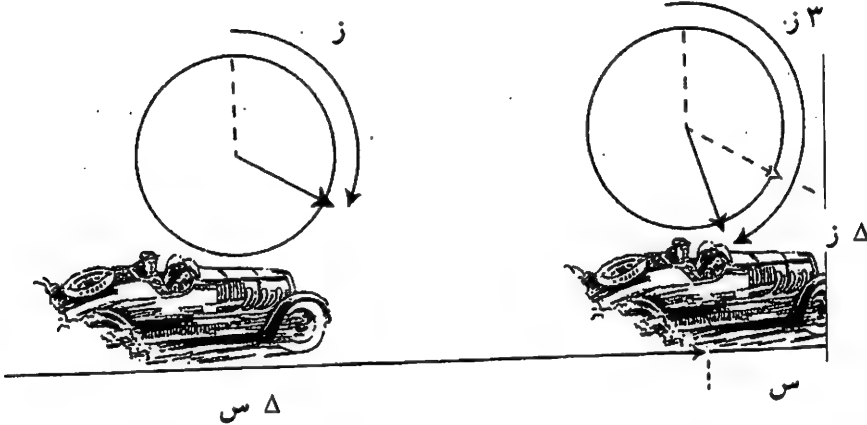
سر التفاضل والتكامل
يكن فى توحيد نوعين من
المسائل التى لم يسبق لها أن ارتبطت،
والتي نسميها الآن التفاضل أو الاشتقاق
والثانية التكامل

التفاضل



عملية إيجاد كيفية تغير كمية ما تسمى التفاضل، فعندما نقوم بتفاضل دالة ما فإننا نحصل على معدل تغيرها .

فإذا أخذنا في الاعتبار مركبة تسير في طريق ما ، فإننا نجد أن موقعها يتغير بصورة متصلة على طول الطريق. وعند أي زمن z يكون موقعها s متمثلاً بواسطة الدالة المتصلة $s(z)$.



- ٢- مع استمرار المركبة في الحركة فإن موقعها سيتغير وليكن هو $s + \Delta s$ وذلك بعد مرور برهة من الوقت Δz .
٤- نصل هذه المركبة إلى موقعها الجديد بعد مرور وقت عبارة عن مجموع الوقت الابتدائي z بالإضافة إلى البرهة Δz أي أن الوقت الكلي هو $z + \Delta z$.

ما هي السرعة المتوسطة أو بعبارة أكثر فنية ما هي السرعة الاتجاهية المتوسطة لهذه المركبة ؟ هي عبارة عن المسافة المقطوعة مقسومة على الوقت اللازم لقطع هذه المسافة

$$\text{أي أنها : } \frac{\Delta s}{\Delta z} = \frac{s(z + \Delta z) - s(z)}{\Delta z}$$

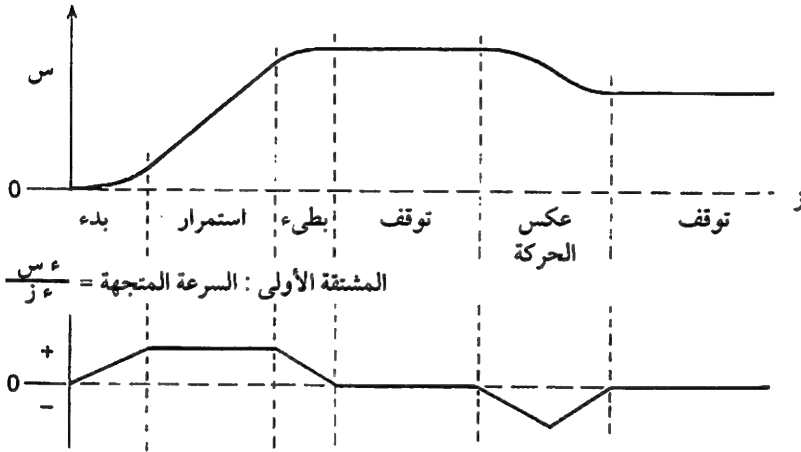
وإذا افترضنا أننا نريد أن نعرف سرعة أى جسم متحرك عند أى لحظة z أو معدل تغير s عند زمن معين z ، نستطيع أن نحسب ذلك عن طريق تقليل الزيادة فى الزمن Δz بقدر الإمكان حتى تصل إلى الصفر. وفى هذه الحالة فإن نهاية السرعة المتوسطة $\frac{\Delta s}{\Delta z}$ عندما تؤول Δz إلى الصفر تعرف بالسرعة المتجهة اللحظية، وتكتب على الصورة:

$\frac{ds}{dz}$ وتُعرف باسم مشتقة s .

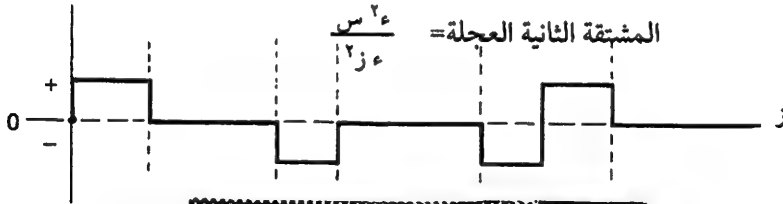




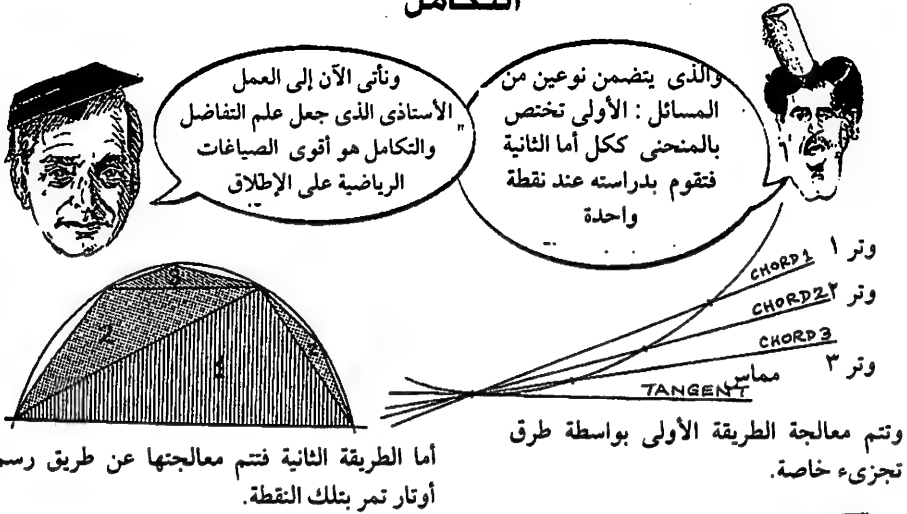
وإذا قمنا برسم s كدالة في z فإن المشتقة تعبر عن ميل المماس للمنحنى عند z .



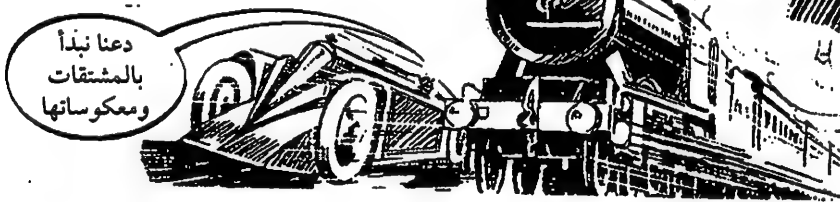
ويمكننا أيضاً القيام باشتقاق المشتقة لنحصل بذلك على المشتقة الثانية، وفي مثالنا هذا للمركبة على الطريق فإن المشتقة الثانية: تعطينا معدل تغير السرعة أو العجلة.



التكامل



وبمجرد فهم أن المنحنيات هي عبارة عن رسومات للدوال فإن مسائل المساحة يمكن أن تُرى بوجهتى نظر مختلفتين. فى إحدى الطرق يمكن تجزئ المساحة بواسطة شرائح رفيعة رأسية أما الطريقة الأخرى فتعتبر أن المساحة هي دالة جديدة والتي لها مشتقة تساوى الدالة الأصلية. وعلى ذلك فإن هناك طريقة واحدة تتضمن المشتقة ومعكوسها يمكن أن تقوم بحل كلا نوعى المسائل.



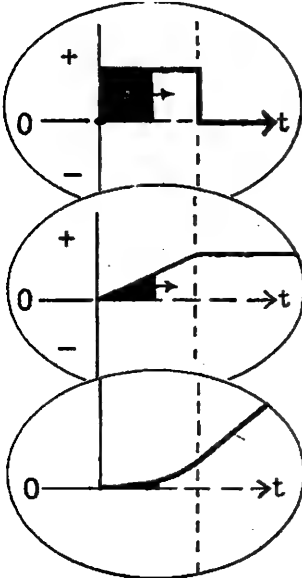
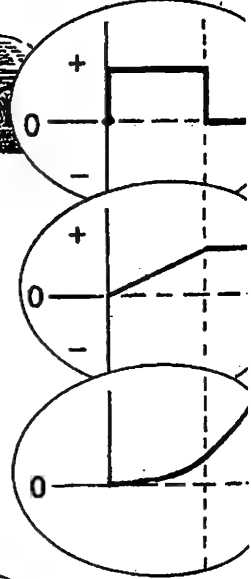
ويمكننا توضيح مدى فاعليتها باستخدام مثال المركبة التى تتحرك على طريق ما والأشكال الثلاثة للمسافة والسرعة والعجلة.. وبدلاً من البدء بدالة المسافة تم القيام باشتقاقها دعنا نبدأ بالمشتقات ونعود بطريقة عكسية إلى دالة المسافة.





فى البداية ، على الجانب الأيسر من الشكل ، نجد أن العجلة موجبة والسرعة تزداد تماماً كما نبدأ بتحريك المركبة ، ونلاحظ أن العجلة الثابتة تؤدي إلى تكون منحنيات للسرعة على هيئة خط مستقيم، ومنحنى للمسافة على هيئة منحنى (أو قطع مكافئ).

والآن لاحظ مرة ثانية أن النقطة التي تتحرك بمرور الزمن على طول المحاور تقوم بعمل مساحة فى المنحنيين



السفليين ، وهذا هو مفتاح فهم التكامل بأكمله ، لذلك راقب جيداً عن قرب.

بالنسبة لمنحنى العجلة نلاحظ أن المساحة المتزايدة تقوم بمسح مستطيل وتزداد مساحته تناسبياً مع الوقت المقطوع ، وهذا تماماً هو نفس سلوك منحنى السرعة !

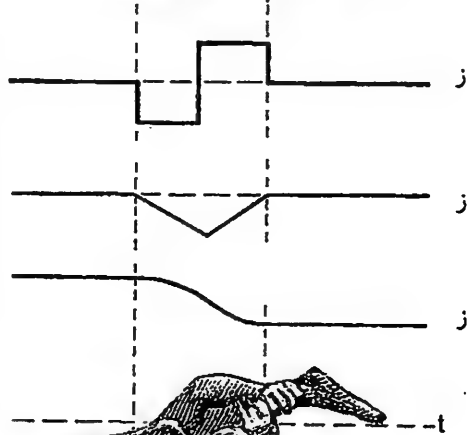
وبالنسبة لمنحنى السرعة فهو يمثل مثلاً متزايداً وتزداد مساحته فى البداية ببطء ثم بعد ذلك بسرعة أكبر، وذلك هو نفس سلوك منحنى المسافة!

والذى نستنتجه من ذلك أنه إذا كانت دالة ما هي مشتقة دالة أخرى فإن هذه الدالة الثانية هي دالة المساحة للدالة الأولى.



وتستطيع محاولة هذه العملية بنفسك عن طريق ملاحظة ما يحدث عندما تعكس السيارة حركتها على الطريق، فى هذه الحالة تكون العجلة سالبة مما يؤدي إلى تكون مساحة سالبة (أسفل محور الزمن) وبالتالي تتجه السرعة إلى القيمة السالبة بمعدل ثابت. ونلاحظ أن المسافة تتناقص حيث يتم تمثيلها بقطع مكافئ مقلوب.

وعند توقف السيارة فإن العجلة تكون مساوية للصفر وكذلك السرعة وتأخذ المسافة قيمة ثابتة.

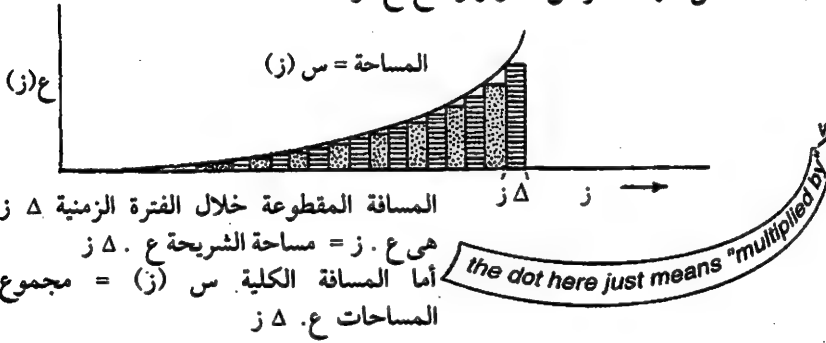


إذا كنت مشغولاً
بتعقيدات التفاضل والتكامل
- فلا تزغ من ذلك فهو يبدو
صعباً في البداية!





فإذا بدأنا بمنحنى السرعة $v(z)$ وتخيلنا أن المساحة أسفل هذا المنحنى عبارة عن
شرائح رفيعة جداً كل منها له عرض Δz وارتفاع $v(z)$.



وكل من تلك الفترات تقوم
بوصف المسافة المقطوعة بسرعة
ثابتة v خلال الفترة الزمنية Δz

وبذلك فإن المساحة الكلية تحت المنحنى
هي مجموع (كل الشرائح) $v(z) \cdot \Delta z$

والآن، كما قلت أنا،
إذا كانت الفترة الزمنية متناهية في
الصغر لكي تتوافق تماماً مع منحنى
السرعة وتأخذ القيمة $v(z)$ فإن
المجموع يتحول إلى الرمز
الخاص...

ليبنيز



$\int v(z) dz$



لكى نرجع إلى التعريف
السابق وهو عكس المشتقة فإن
كل ما نحتاج تخيله هو الشريحة
الرقيقة السابقة وهى Δ س
نفسها.
وحيث إن Δ س = ع Δ . ز .

$$\text{فإن } \frac{\Delta \text{ س}}{\Delta \text{ ز}} = \frac{\text{ع} \Delta \text{ ز}}{\Delta \text{ ز}}$$

$$\text{ولذلك فإن } \frac{\text{ع} \Delta \text{ ز}}{\Delta \text{ ز}} = \text{ع} \text{ (ز)}$$

وعلى ذلك فإن مشتقة الدالة المتكاملة التى تم تعريفها من خلال مجموع الشرائح هى
نفسها الدالة التى تُعبر. مساحتها عن الدالة المتكاملة.
والآن من السهل أن نوجد مشتقات الدوال سواء إذا كان بصورة جبرية أو بواسطة
بعض الدوال. ولإيجاد الصورة الجبرية لدالة المساحة فإننا نقوم بالبحث عن تلك الدالة
التي تُعبر مشتقتها عن الدالة الأصلية ويتم اختزال المسائل التى تختص بدراسة خواص
المنحنى ككل إلى مسائل أبسط تدرس خصائص المنحنى عند نقطة.





وقد تم تطبيق التفاضل والتكامل في مجالى الميكانيكا والفلك.
وأدى استخدام المعادلات التفاضلية فى الفيزياء إلى نشأة الفيزياء الرياضية،
وبمساعدها فقط استطعنا أن ندرس علوم الحرارة والطاقة والكهربية والمغناطيسية.
ويعتمد العلم الحديث،والذى يدعم التكنولوجيا المتقدمة، بصورة مباشرة تماماً على
التفاضل والتكامل.

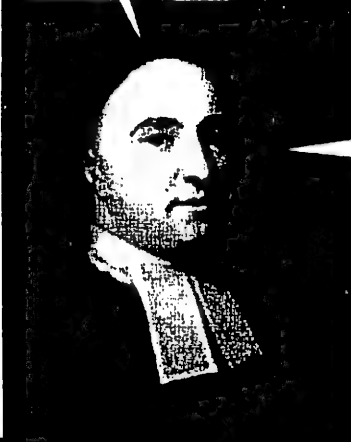
أسئلة بيركلي

ماذا عن هذه الزيادة الصغيرة ولغز كيفية وصولها للصفر ؟ سأل الناس هذا السؤال في وقت نيوتن وليبنيز وكانت الإجابة غير مرضية عند ذلك قام الفيلسوف

لقد لاحظت أن خارج
القسم له معنى فقط إذا
كانت هذه الزيادة الصغيرة لا
تساوى الصفر. وإلا فإننا نقوم
بالقسمة على الصفر وهذه
عملية غير منطقية

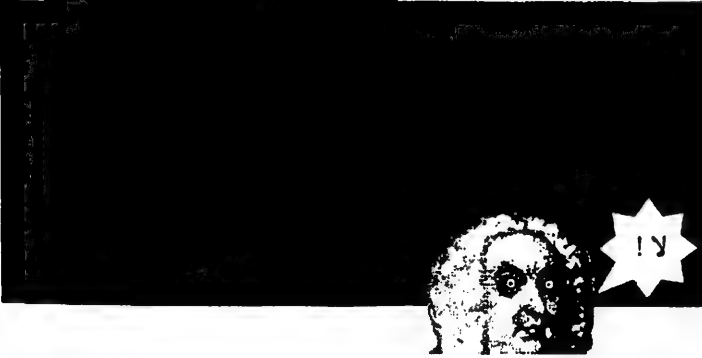


والأسقف الإنجيلي
الآيرلندي جورج
بيركلي
الأسئلة في
صورة
حادة جداً.



لكل الزيادة
الصغيرة دائماً لا تساوى
الصفر أم هي تساويه تماماً
أم أنها هي «شيء كمية
متلاشية»؟

ويغض النظر
عن ذلك يا فتى! فإن
السيد نيوتن عرضه
للهجوم.



وكان هدف بيركلي هو توضيح أن الملحدين الذين طالبوا بسرعة إichلال الألفاظ والخرافات الدينية بالعلم والعقل كانوا على درجة من الجهل العقائدي مثلهم مثل أسوأ علماء الدين. وقد سأل في افتتاحية كتيبه: «... هل أن الأهداف والمبادئ والتداخلات الموجودة في التحليل الحديث قد تم فهمها بوضوح وإثباتها بالدليل أكثر من الألفاظ الدينية ونقاط الإيمان؟» وكانت الإجابة واضحة بالنسبة له...

وقد اتجه علماء الرياضيات إلى الإجابة على الأسئلة التي وردت في كتيب بيركلى الذى أسماه «المحلل» وقد استخدم بيركلى هذه الإجابات لمواجهة ارتباكاتهم بصرامة، وكان رده : إن دفاع أصحاب الأفكار الحرة فى الرياضيات يعتبر عملاً أستاذاً فى التحليل الحرج.



يتعلم الإنسان مبادئ
العلوم بالتناقل من شخص لآخر،
وكل متعلم يكتسب دفاعاً أقل أو أكثر مما سبقه بناءً
على خبرته، وخاصة المفكرين المبتدئين (حيث يحرص
القليل منهم على الإسهاب فى توضيح المبادئ) بما فى
ذلك نسبة كبيرة تميل بهم إلى الثقة: والأشياء المسلم بها
كتيجة لتكرارها أصبحت شائعة : وهذا الشيوع يؤدى
إلى الإثبات مع مرور الوقت.

وقد حاول بيركلى أن يوضح أن تعلم حل المسائل فى الرياضيات والعلوم لا يساعدنا بالضرورة على فهم ما يدور حوله. وقد توقع صورة البحث العلمى الذى تم تطويره بواسطة ت. س. كون الذى قام بوصف «العلوم العادية» كعملية تدريب على «حل الألغاز» من خلال مثال (إطار التفكير) لم تتم الإجابة عليه وهو بالفعل لا يمكن الإجابة عليه طوال فترة عمله. وبالنسبة لكون العلم العادى فى الواقع عبارة عن تدريب لأصحاب العقول الضيقة، وعملية تدريس العلوم (بما فيها الرياضيات) هى بالضرورة شىء جازم بدون دليل.



إله أويلر

كان العالم السويسري ليونارد أويلر (١٧٠٧ - ٨٣) أول من ربط بين الدوال الأسية والدوال المثلثية ووضع صيغة لعلاقتهم. كان لأويلر عبقرية غير عادية في الرياضيات وهناك الكثير من القصص حول براعته الفائقة. وكان أويلر موظفاً في بلاط قصر فريدريك ملك بروسيا حينما قابل الفيلسوف الفرنسي دينيس ديدروت (١٧١٣ - ٨٤) الذي كان ملحداً متعصباً..

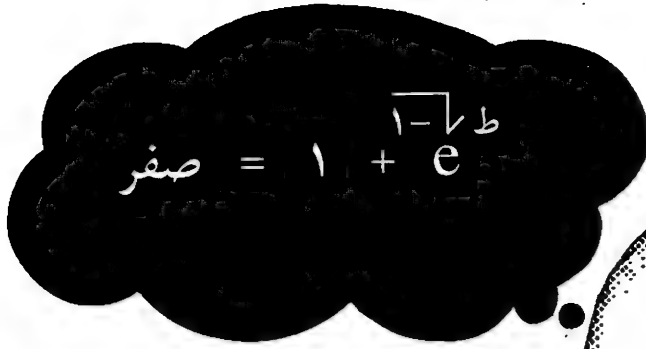


ولا تحتوي الصيغة التي ذكرت في هذه القصة على شيء في مضمونها، ولكن قام أولر بتطوير معادلة من أجمل الصيغ في الرياضيات كلها، والتي تجعل من يتعرض لها أن يتوقف أمامها ويفكر فيها بالتأكيد. والصيغة التي وضعها أولر هي تعبير لغزى مبهم والذي يقوم بربط الأرقام الخمسة الأساسية في الكون.



$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad \text{ط}$$

صفر = ١ + e

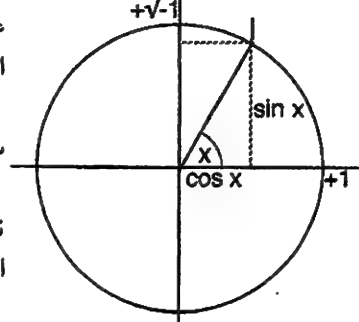


وبالنظر إليهم بترتيب معكوس ، فأول ما
نقابله هو الصفر شبه الرقم ذو الصفة اللغزية.
بعدها نجد ١ ، الوحدة ، أساس كل الأرقام.
ثم يظهر لنا سالب واحد تحت الجذر
التربيعي ($\sqrt{1-1}$ الذي يسمى «ت») وهو الوحدة
الأساسية في «الأعداد التخيلية» والتي أذهلت
العديد من الثقافات والحضارات. بعد ذلك نجد
أقدم الثوابت الرياضية ، ط ، الذي يقيس النسبة
بين محيط الدائرة وقطرها. أما آخر رقم وهو
أحدث ما تم اكتشافه ، الرقم المبهم ، e ، وهو
أساس النمو الأسى الطبيعي.
هل كان من الممكن استنتاج علاقة مثل هذه
بالتجربة أياً كان طول تكرارها؟

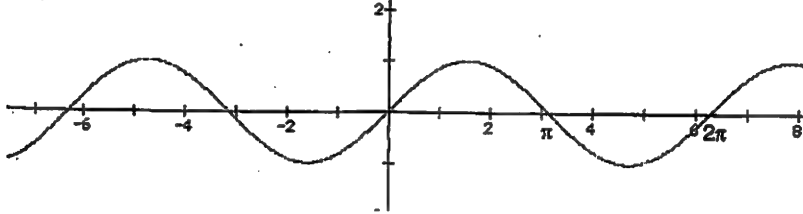
وفى الواقع، فإن صيغة أولر الرائعة جداً قد نتجت من دالة (قد اكتشفها هو) تربط بين الأعداد المركبة والدوال المثلثية التى اكتشفها علماء الرياضيات المسلمون (انظر صفحة ٩١).

وقد لاحظنا أن الدالة e^s لها منحنى يتزايد بسرعة كبيرة، وعلى العكس فإن e^{-s} س يمثل دائرة ! ونصف قطر هذه الدائرة هو الوحدة أما s فهي الزاوية التى يصنعها الخط الواصل من نقطة الأصل إلى أى نقطة. وتزداد قيمة s من صفر إلى 2π مع تحرك النقطة على الدائرة. ولكن إذا نظرنا إلى هذه الصيغة من وجهة نظر حساب المثلثات نجد أن e^{-s} س هو عبارة عن

عدد مركب الجزء «الحقيقى» فيه هو جتا s أما الجزء «التخيلى» فهو جا s .
لذلك يمكننا كتابته $e^s = \cos s + j \sin s$.
س، حيث s هو الرمز الشائع لـ $\sqrt{-1}$.
ماذا لو انحدرت النقطة على الدائرة مرة أخرى،
نجد أن الزاوية s تستمر فى الزيادة، هذا يعنى أن
الدوال e^s $\cos s$ و $\sin s$ تستمر فى تكرار



نفسها. ويقال إن هذه الدوال دوال دورية. ويتم تمثيل منحنى $\cos s = \cos$ على الصورة :
وشابه هذا العديد من الظواهر التى إما أن تكون تبادلية بالنسبة للزمن مثل التيار الكهربى ،
أو الموجات المنتشرة فى الفضاء مثل الصوت. ودوال الجيب وجيب التمام هى الوحدات



البنائية فى كل صور الموجات المعقدة التى تحمل رسائل ما. والقيام بالرياضيات بواسطة دوال الجيب أو جيب التمام عن طريق استخدام الصيغة «الأسية التخيلية» تقوم بتحويل الحسابات المرهقة إلى تمرينات مرتبة وسهلة.



علوم الهندسة اللا إقليدية

وبعد ذلك أصبح هذا النظام أساساً لمرحلة عظيمة في تاريخ التخيل الرياضى وهى ابتكار الهندسة اللاإقليدية .

وقد تم ابتداء هذه الهندسة بواسطة العديد من الأشخاص، ولكن أول من قام بذلك لم يكن يعرف أنه يسير فى اتجاه هذه الهندسة . كان هذا هو عالم الرياضيات المسيحى ج ساكتشيرى والذي نوى أن ينهى كل هذه المراوغات نهائياً. وقد حاول فى كتابه «تحرير كل العيوب بواسطة إقليدس» فى عام ١٧٣٣ أن يوضح أنه من المستحيل التعامل مع الهندسة بدون «فرض التوازى».

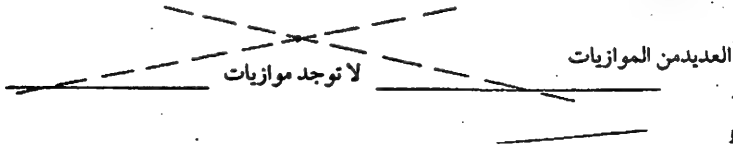


رأينا أن إقليدس استنتج كل هندسته من «ملاحظات شائعة» قليلة «وافتراضات» ذاتية الدلائل، ولكن واحدة من هذه الافتراضات والتي تختص بالخطوط المتوازية تبدو مشابهة للنظرية لدرجة كبيرة . وقد شكل نظام إقليدس هذا ارتباطاً على مر العصور غير أنه قابل شكوكاً فى صحته واكتماله.



ولم يكن هناك أى شيء خطأ فى النتائج، وتم تكرارها فى وقت لاحق بواسطة المخترعين الحقيقيين الذين كانوا يعرفون ماذا يفعلون. هناك العديد من الطرق التى يتم بها التعبير

عن مبدأ التوازى. وبالنسبة لنا فتكون طريقة التعبير كالتالى : إذا أخذنا فى الاعتبار خطاً مستقيماً وكانت هناك نقطة خارجة عنه فإنه يوجد خط واحد وواحد فقط يمر بهذه النقطة ويوازى ذلك الخط فى نفس الوقت ، وإذا لم يتم قبول هذا التعريف تكون النتيجة : إما أن يكون لدينا أكثر من خط يحمل هذه الخاصية أو ألا يكون هناك أى خط على الإطلاق يوازى الخط الأول.



فى البداية تم التحقق من فكرة العديد من الموازيات بواسطة كل من عالم الرياضيات
المجرى جانوس بولاي (١٨٠٦ - ٦٠) وعالم الرياضيات الروسى نيقولاى لوبا شيفسكى
(١٨٥٦ - ١٧٩٢) كل على حدة وفى ذات الوقت تقريباً . وبعد ذلك قام العالم الألمانى جورج
ريمان (١٨٢٦ - ٦٦) بالتحقق من فكرة عدم وجود موازيات . وفى النهاية تم التحقق من أن هذا
النوع من الهندسة من الممكن أن يتم بواسطة إنشاءات فى أنواع خاصة من الأسطح . فبالنسبة
لهندسة ريمان تعتبر الكرة مثلاً جيداً إذا اعتبرنا أن الخط عبارة عن دائرة عظمى ، وهو المنحنى
على سطح الكرة الناشئ عن تقاطع مستو يمر بمركز الكرة مع سطحها . ويلاحظ أن أى دائرتين
عظميين تتقاطعان فى نقطتين وعلى ذلك فلا يوجد أى موازيات .

لوبا شيفسكى



بولاي



بالنسبة لهندستنا فإنه من
الصعب توضيح السطح

إنه يشبه شكل البوق
الذى يتكون نتيجة دوران
منحنى حول خط

والخط هو أقصر مسافة بين نقطتين . وقد
اتضح أن هناك العديد من الموازيات ، وهى
الخطوط التى لا تتلاقى أبداً مع ذلك الخط .
وقد وضع اعتياد الناس على علوم الهندسة
اللاإقليدية ضعف المقولة بأن الرياضيات تخبرنا
بالحقائق المنطقية . ولكن هذا التفكير التطورى
أخذ وقتاً طويلاً لكى يتلاءم معه الناس .

الفضاءات نونية(*) الأبعاد

هناك تطور آخر معاكس للبديهية في الهندسة وهو دراسة الفضاء الذى له أبعاد أكثر من ثلاثة . وامتداد نظام ديكارت للهندسة الجبرية بحيث يتم وضع أبعاد أكثر وضوحاً ومباشرة. فبدلاً من أن يتم التعبير عن موقع نقطة في المستوى بواسطة الأبعاد (س،ص) يتم التعبير عنها في هذه «الفضاءات الزائدة» بواسطة الأبعاد (س₁ ، س₂ ، س₃ ،، س_n). وبالطبع تختلف خصائص المنحنيات في هذه الفضاءات الزائدة عن تلك المرسومة في بعدين أو ثلاثة، ولكن الاعتقاد بوجود تلك الفضاءات متعددة الأبعاد لا يشكل أى صعوبة بالنسبة لنا في هذه الأيام.



في العصر الفيكتوري كان الأمر مختلفاً جداً.

(*) لها عدد ن من الأبعاد في الغالب يكون أكثر من ثلاثة. (المترجم).

ونمت كتابة عمل جيد عن الخيال الرياضى والنقد الاجتماعى يهتم بهذه الفكرة وهو يسمى «الأرض المستوية Flatland» وهذا العمل يصف مجتمعاً من الأشخاص الفعليين الذين يعيشون فى مستوى ، وهذا مشابه تماماً لفترة العصر الفيكتورى حيث كانت حالة الفرد الاجتماعية تعتمد على عدد «جوانب الشخص Person's sides» حيث كان للطبقة العليا أربعة جوانب وللأرستقراطيين العديد والعمال ثلاثة، أما النساء فكانت لهم مجرد إبرة!

وكان «المربع» البطل الذى لديه خبرة بالأبعاد الثلاثة من خلال علاقة الصداقة التى تربطه بالكرة . وكان هذا الكائن يظهر لسكان هذه الأرض كل خمسمائة سنة على هيئة دائرة التى تبدأ من نقطة ثم تنمو ليزداد حجمها وبعد ذلك تتضاءل ثم تختفى . والذى لم يكن مفهوماً بالنسبة لقاطنى هذا المكان هو الكرة التى تمر عبر مستواهم . فهذه الكرة تصادف المربع وتأخذه فى رحلة عبر الفضاء وتعرض عليه الأرض الخطية والأرض النقطية الآهل بمخلوقات راضية نوعاً ما . وتقوم كذلك بإطلاعه على الحياة الخاصة لسكان الأرض المستوية . ويعانى المربع كثيراً فى رحلة عودته حيث إنه يحاول أن يصف الفضاء ولكنه يعجز عن توضيحه لأصدقائه ، الذين يظنون أنه منزعج .

"O day and night, but this is wondrous strange!"



وفى النهاية لم أصبح
موهوماً بالكائنات
التي لها أبعاد أعلى !

إيفاريست جالوا

فى أثناء القرن التاسع عشر ازدادت قوة وعمومية العبر، فقد أصبح متأصلاً فى شكلية وصياغته. وبالتدريج بدأت فكرة أن أنظمة الصياغة تستطيع أن تشير إلى أشياء أخرى غير الأرقام والعمليات الحسابية عليها. وقد تم اتخاذ خطوة للأمام فى هذا المجال بواسطة العالم الرياضى الفرنسى إيفاريست جالوا (١٨١١ - ٣٢) وهو بدون شك واحداً من أهم الشخصيات البارزة فى تاريخ علم الرياضيات. وقد كان واحداً من الجمهوريين الغيورين فى وقت فيه العديد من الصراعات السياسية. وقد كان ضحية عوامل الغضب الثورية، وقد قتل فى ريعان شبابه وعمره ٢١ سنة. وفى آخر ليلة قبل وفاته قام بكتابة مخطوطة تحتوى على كل أفكاره. وقد اختفت هذه المخطوطة فى البداية ثم بعد ذلك ظهرت ونُشرت بعد خمسة عشر عاماً من وفاته.

وقد قام جالوا بمناقشة مشكلة قديمة وهى إيجاد جذور المعادلة الخامسة $x^5 + \dots = 0$ صفر. وفى وقته اجتمعت كل الآراء على استحالة هذه العملية ولكن لم يقم أحد بإثبات ذلك.



المجموعات

المجموعات هي تكوينات رياضية يتم تعريفها بواسطة عناصر وبعض قواعد الاندماج. ويمكن اعتبارهم أنهم أنظمة حسابات ولكن بدون أرقام، فلا توجد علاقة بين عناصر تلك المجموعات وبين القياس أو العد وكذلك فهي ليست أرقاماً بالمعنى الطبيعي للكلمة. وقد أوضح جالوا أن هناك تنبأ من العمليات التي تسلك نفس سلوك الجمع.

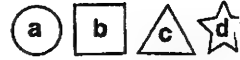


وهذه التتابعات لها القليل من الخصائص التي تُعرفها.

- ١- لكل عنصرين يوجد عنصر ثالث ينتج من اندماجهم، مثل $2+2=4$.
- ٢- هناك عنصر يسمى بعنصر «الوحدة» وهو لا يغير العنصر الذي يندمج معه مثل : $2+0=2$.
- ٣- كل عنصر له «معكوس» والذي عندما يندمج معه ينتج عنصر الوحدة مثل $2+(2-)=0$ صفر.



وكمثال لأحد المجموعات ، وهي أحد الأمثلة البسيطة جداً التي قدمها جالوا ، نأخذ في الاعتبار الأربعة أشكال المسماة.



وهذه ليست عناصر المجموعة ، ولكن عناصر المجموعة تتكون من عملية تدوير هذه الأشكال الأربعة. وإذا تخيلنا عملية تدوير بينهم إما عن طريق تدوير واحد فقط



مثل :



أو اثنان مثل :

أو ثلاثة مثل :

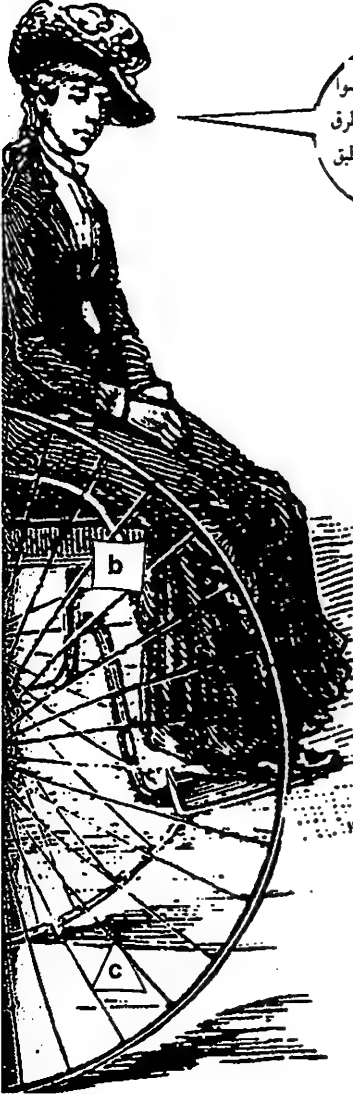


إذا قمنا بالتدوير بواسطة أربعة أماكن فإننا نرجع إلى الوضع الأول وهذا يعتبر عنصر الوحدة

تورية خفية في الدورة



وإذا أسمينا عمليات التدوير هذه I,C,B,A فإن $C+A$ يعتبر تدوير $1+3$ أماكن أو 4 أماكن وهو مساو لعنصر تدوير الوحدة I ! ومن الممكن أن نكون جدولاً لجمع هذه العناصر بكل الصور.



بالرغم من أنهم ليسوا
أرقاماً ولكن هناك طرق
حسابية يمكن أن نطبق
عليها

	I	A	B	C
I	I	A	B	C
A	A	B	C	I
B	B	C	I	A
C	C	I	A	B

وبالرغم من أن هذا المثال تافه إلى حد ما إلا أنه يحتوي على فكرة فعالة ، وهي أن علماء الرياضيات من الممكن أن يلاحظوا أى نظام عمليات عن طريق «جدول الجمع» . ونحن لسنا بحاجة إلى أمثلة إما في الحالة الفيزيائية مثل الحركة أو الجبرية مثل جذور المعادلات. وهذا الهيكل البنائي يقوم بتعريف نفسه، ومثل هذه الهياكل البنائية والتي لا يلزم أن تكون مجموعات ومن الممكن أن نجد مجموعات اندماج أخرى وربما تظهر جداول لعملية الضرب أيضاً.

العمليات الجبرية على الفئات

بعد ذلك تمت دراسة أنواع أخرى من العمليات ، وأشهر تلك العمليات قام بتطويرها عالم الرياضيات البريطاني جورج بول (١٨١٥-٦٤) . وقد سمع بول بتطبيق الطرق الرياضية لكيّنونات غير كمية مثل الافتراضات المنطقية.



قمت، بتواضع، بتسمية مجهوداتي
تلك بـ «قوانين الفكر».

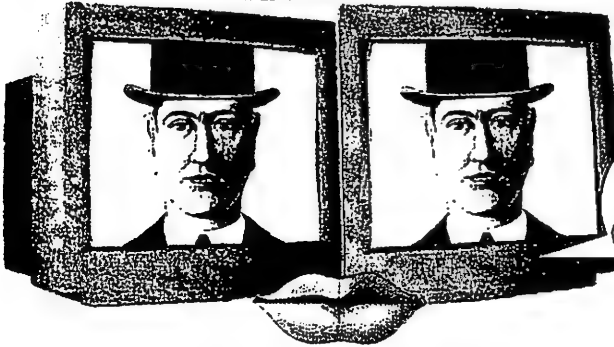
وفي صيغته الحديثة،
يسمى الفرع «بالعمليات
الجبرية على الفئات».



يتضمن ذلك عملية
«الاتحاد» (والفئة الناتجة
تحتوي على مكونات
كلتا الفئتين).

لا أفضل أن أفقد أى عنصر خلال
هذه العملية وإلا...

والتقاطع (وتحتوي
الفئة الناتجة على العناصر
الموجودة في الفئتين
فقط).



يتم استخدام العمليات
الجبرية على الفئات عندما
نقوم بعمل اختيار ما بين عدد من
المزايا، ويحدث ذلك عندما نقوم
ببحث على الإنترنت.

لنفترض أننا نبحث عن Hot Cross Buns فإننا نقوم بكتابة الكلمات الاسترشادية.

Hot Cross Buns

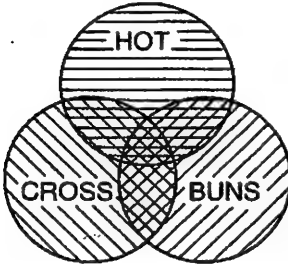
ويقوم محرك البحث بسؤالنا عما إذا كنا نريد المواقع التي بها

كل الكلمات الاسترشادية

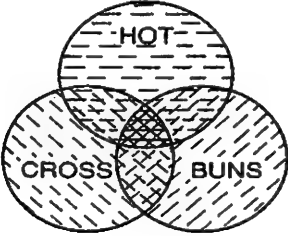
أو

أي الكلمات الاسترشادية

والاختيار الأول يعطينا كل المواقع التي تحتوي على Hot أو Cross أو Buns ويتم تمثيل ذلك بواسطة أشكال «فن» على الصورة :



ويعنى هذا بلغة الفئات (Hot) + (Cross) + (Buns). وهذا يعنى أنه يولد الكثير من المواقع التي لها الكثير من الاهتمامات وهي ليست بالضرورة ذات صلة بما نريد. ولكن إذا كنا نريد "Hot Cross Buns" فقط فهذا يعنى أننا سنحصل على المواقع التي تحتوي على كل من Hot و Cross و Buns ويصبح شكل فن في هذه الحالة :



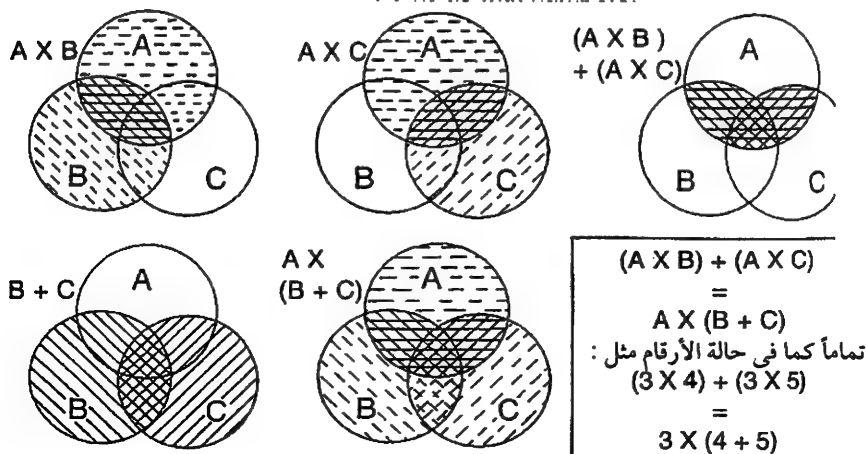
والذى يعنى بلغة الفئات (Hot) × (Cross) × (Buns) لذلك سنحصل على "Hot Cross Buns" ولا شيء غيرها.



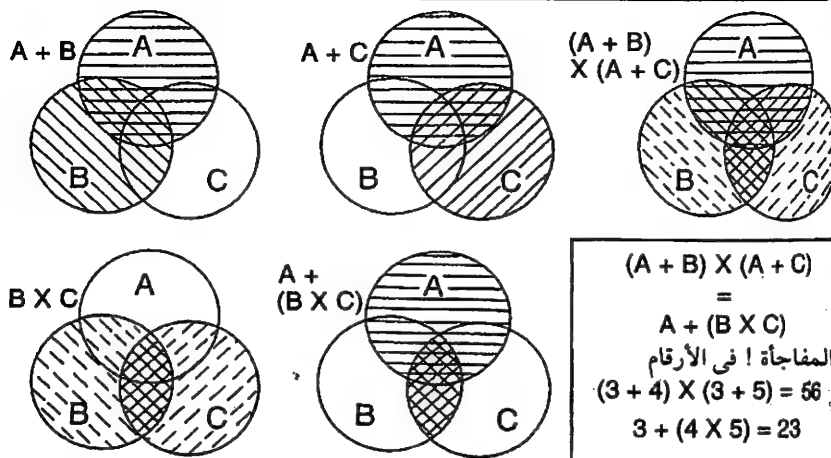
والعمليات الجبرية على الفئات شيقة جداً وذلك لأنها على عكس الحسابات تحتوى على نوعى علاقات «التوزيع».

$$C + A = (C \times B) + A \quad \text{وكذلك} \quad C \times A = (C + B) \times A$$

والحالة الأولى تتماشى مع الحسابات العادية ولكن الثانية لا تتماشى . أما فى حالة الفئات حيث تعنى "X" التقاطع و "+" اتحاد تتماشى كلتا الحالتين من خلال التوضيح المبين بواسطة «أشكال فن» وها هو «قانون التوزيع» الذى يتحقق بالنسبة للأرقام.



والآن وللمفاجأة



ومثل هذه الأمثلة أعطت علماء الرياضيات مدى فهم عظيم لتخليهم. فالحسابات التى يقوم بدراستها علماء الرياضيات أصبحت متزايدة فى اختلافها عما نعرفه عن الأرقام.

كانتور والفئات

بينما انشغل البعض بالأرقام كان البعض الآخر مهتماً باللانهايات. والفئات الموصوفة بكونها لانهاية في الحقيقة ثم تركها للرموز الرياضية واللغزية.

وقد توجه عالم الرياضيات الألماني جورج كانتور (١٨٤٥ - ١٩١٨) إلى ترويض اللانهاية.



وضعت كيفية تكوين مثل تلك الفئات وقمت أيضاً بعمدهم.

وقد وضع مخطط لعد الأرقام الكسرية عن طريق وضعهم في منظومة مثل هذه .

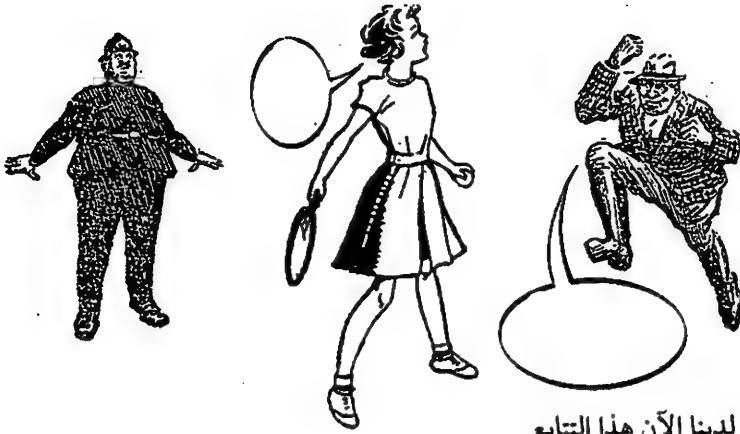
1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	
1/3	2/3	3/3	4/3		
1/4	2/4	3/4			
1/5	2/5				
1/6					

وها هي القاعدة التي يتم من خلالها إحصاء كل الكسور .

لاحظ كيف تبدأ الأسهم ، في البداية من المربع في أعلى اليسار، ثم على طول القطر أسفل إلى اليسار ، من $\frac{2}{1}$ ثم $\frac{3}{1}$ وهكذا. وأثناء استمرارك لاحظ إذا كان هناك رقم قد تم عدّه بالفعل (مثل $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$) وقم بحذفه. أيضاً قم باختصار الكسور إلى أبسط صورة مثل $\frac{2}{2} = 1$.

هل هذا متأخر جداً للقيام بمزحة خياب الفرس؟





يتكون لدينا الآن هذا التسايع

$$... ٥, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, ٤, \frac{1}{3}, ٣, \frac{1}{2}, ٢, ١$$

ويبدو هذا وكأنك تقوم بتجميع الكسور التي يساوى مجموع بسطها ومقامها ٢ ثم ٣ ثم ٤ وهكذا على الترتيب وفي كل مرة تبدأ بأكبر رقم . وبهذه الطريقة سوف نصل إلى أى رقم كسراً كان أو صحيحاً إن عاجلاً أو آجلاً.

وبالمثل من الممكن أن نحصى الأرقام التي تحل المعادلات الجبرية مثل :

$$\sqrt[3]{-1} \text{ و } \sqrt[3]{2}$$



افترض أننا قمنا بإحصاء كل الأرقام مثل الكسور والأرقام الجبرية، فإن هناك قائمة لا نهائية لهذه الأرقام مشابهة لما حصلنا عليه قبل ذلك للكسور والآن من الواضح أن الأرقام لا تظهر في ترتيب حسب جمعها..

الشكل

وتوضح النقاط بجوار خانات الرقم أنه يستمر دون حد.

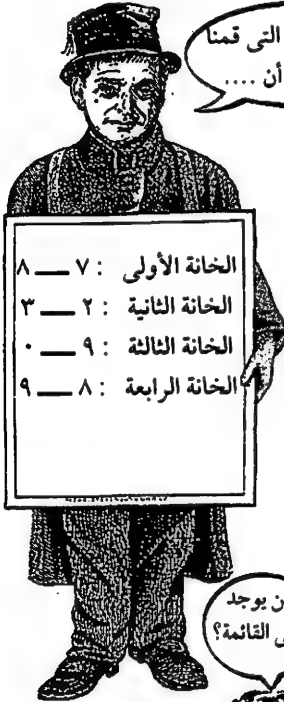
أما خط النقاط بعد ن ؛ يوضح أن تتابع الأرقام أيضاً يستمر دون حد.

والآن إذا كانت كل الأعداد الحقيقية
متضمنة في هذه القائمة فإن أى رقم نتخيله
سوف يكون واقعاً فى مكان ما فى
هذه القائمة .

وإذا لم يكن
كذلك فيجب أن نسلم
بأننا لم نقم بإحصاء
كل الأعداد.



كيف يمكننا إنشاء رقم غير موجود في هذه القائمة ؟ حسناً افترض أن هناك رقماً ما مختلفاً في الخانة الأولى مع الرقم الأول، وفي الخانة الثانية مع الرقم الثاني، والخانة الثالثة مع الثالث وهكذا . ويمكننا فعل ذلك إذا كانت كل خانة في هذا الرقم تزداد بمقدار واحد عن خانة الرقم الموجود في القائمة.



وكما نستطيع أن نلاحظ فإن الأرقام التي وضعتها تأخذ الصورة العشوائية ، ومن الممكن أن تكون مختلفة تماماً ولا يغير ذلك من نقاشنا. لذلك الرقم الجديد الذي من الممكن أن نسميه الغريب يأخذ الصورة غ = ٨٣٠٩٠٠٠،
وها هو أسلوب البحث



وقد تعامل كانتور مع نوعين من اللانهائية: الأرقام المعدودة (مثل الأرقام العادية) والنقاط الواقعة على خط ما. ما هو مدى ارتباطهم ببعض؟ بعد ذلك تمكن من الحصول على طريقة لوصف الترتيب الأعلى من اللانهائية بطريقة عامة وبالنسبة لهذه النقطة سنقوم بالترتيب فكرة الفئة الجزئية. إذا كانت لدينا فئة مكونة من ثلاثة عناصر c, b, a فإن فئتها الجزئية هي الأرواح bc, ab, ac والعناصر الفردية c, b, a والفئة الفارغة وكذلك الفئة الأصلية ذاتها.

abc	a	b	c	ab	ac	bc	
-----	---	---	---	----	----	----	--

وبحساب عدد هذه الفئات نجد أنه ثمانية فئات أو 2^3 . وهذه الفئة الخديجة تسمى فئة القوى (أو الأس) للفئة الأصلية، وإذا كانت الفئة الأصلية تحتوي على عدد n من العناصر فإن فئة القوى تحتوي على 2^n عنصر.

وبهذه الطريقة استطاع كانتور أن يكون فئات كبيرة جداً عن طريق تكوين فئة القوى لواحدة تلو الأخرى (أي بحسبها لواحدة ثم بحسب فئة القوى لفئة القوى وهكذا). وقد وضع رمزاً جديداً لحجم هذه الفئات ولكونه يهودياً فقد فضل استخدام الحرف العبري القديم \aleph (Aleph) وعلى ذلك إذا كانت فئات المعدودات لها حجم \aleph فإن فئة القوى لها تكون 2^{\aleph} هكذا.

وعلى الجانب الآخر فإن فئة الأعداد الحقيقية على خط الأعداد وهي أول فئة معدودة \aleph_1

ربما يبدو مقبولا أن نفرض أن 2^{\aleph_1} تساوي \aleph_1 ولكن هذا الفرض أزج علماء الرياضيات عبر الأجيال.

مستحيل



الطواف حول اللانهايات
كان مثيراً ومربكاً بالفعل ولكنه
بعد ذلك أصبح كارثة !!!

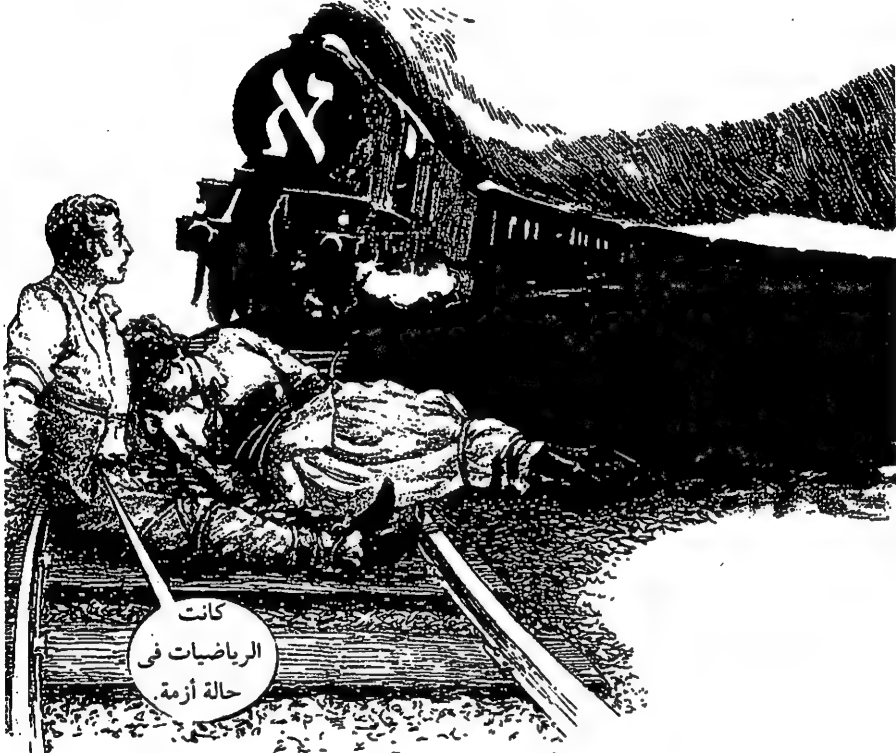
وإذا كنا نتحدث عن الفئات بهذه الصورة العامة ، فلا يوجد شيء يمنعنا من الإشارة إلى فئة كل الفئات والتي لها معنى لغوي ، أليس كذلك؟ وهذه الفئة لا بد أن تكون أكبر الفئات على الإطلاق ويتم تعريفها من خلال \mathbb{R} معينة ولكن \mathbb{R} . ولكن مثل أي فئة أخرى ما يوجد لهذه الفئة فئة قوى يعطى رقمها على الصورة \mathbb{R}^2 ومن المؤكد أنه أكبر من \mathbb{R} لذلك ما قمنا بتعريفها على أنها أكبر الفئات على الإطلاق يتولد منها فئة أكبر ، وهذه الفكرة تحوي تناقضاً ذاتياً !



ويبدو هذا مثل
ثورة الأطفال عندما
يستوقفهم مدرسوهم إذا
سألوا عن آخر رقم.

أزمة في الرياضيات

قدّم تناقض اللانهاية الذي تم اكتشافه بواسطة كانتور تحدياً جديداً لعلماء الرياضيات. وهذا لا يشابه التحديات الرياضية السابقة مثل $1-\sqrt{1}$ أو $\frac{e}{z}$ ، ولكن على هذه الحالة يوجد تعارض ذاتي واضح. وقد تم إثبات أن هذه التناقضات لا تختلف في تفاصيلها عن الرياضيات الاصطلاحية.



وفي بداية القرن العشرين شرع مجموعة من الفلاسفة وعلماء الرياضيات في حل هذه الأزمة، وسألوا...



رأيتيل والحقيقة الرياضية

كان بيرتراند راسيل من بين من عكفوا على حل هذه الأزمة.
وقد عمل طويلاً في دراسة المنطق والفلسفة والتعليم التقدمي وفي النهاية
التبرؤ والاحتجاج على الأسلحة النووية. وقد مثلت
الرياضيات بالنسبة له الحقيقة المؤكدة الوحيدة في العالم
في مواجهة الادعاءات الزائفة للرهبنة.

قمت أنا وكثير
غيري بدراسة المتناقضات
المنطقية لإيجاد حلول
للأخطاء التي واجهت
كانتور.

وكان هذا معروفاً بالفعل منذ أوقات
اليونانيين القدماء، وقد اعتمد جزء منه
على استخدام «كل» كما في «فئة كل
الفئات».



وأحد أكثر المتناقضات براعة يختص بتسميتها . دعنا نقوم بتعريف B على أنه أقل عدد صحيح يمكن تسميته في ما لا يقل عن ١٩ مقطعاً .
 باستخدام الطريقة العادية نجد أن هذا الرقم كبير جداً لأنه يحتاج تسعة عشر مقطعاً لتسميته : حيث إن الرقم «سبعمائة ألف مليون بليون» يحتاج فقط إلى عشرة مقاطع .



وهذا تناقض خطير جداً بالفعل حيث إنه لا يتضمن إشارة ضمنية ولا حتى يتميز بالشمول . وهذا يوضح مدى صعوبة إنقاذ الوثوق في الرياضيات عن طريق التخلص من أساسياتها المنطقية.





وكان ذلك عن طريق اعتبار النقاشات الرياضية أنها شكلية خالصة مكونة من مجموعة من الرموز ، وملاحظة إذا كانت في هذه الحالة قاسية أم لا.

وقد تم تطوير نوع آخر من الهجوم كمحاولة أخيرة لتأمين الحقيقة الرياضية.

يتم وضع الإثبات في صورة سطور من الرموز المتصلة ببعضها عن طريق بعض قواعد التحويل. وكان الهدف هو توضيح أن الإثباتات «المتحققة» يمكن تمييزها عن الإثباتات «غيرالمتحققة» ، وبذلك فإن أي جملة رياضية من الممكن أن تكون صحيحة أو خطأ.

على أية حال فقد تم تفجير هذا البرنامج بواسطة أحد مجنديه البارعين ، أنا كورت جوديل.

نظرية "جوديل"

قام جوديل (١٩٠٦ - ٧٨) بنشر نظريته في عام ١٩٣١ كنتيجة لأعمال أ. ن. وايتهيد (١٨٦١ - ١٩٤٧) وكذلك كتاب راشيل المكون من ثلاثة أجزاء عن المنطق الرمزي في الفترة (١٩١٠ - ١٣) Principia Mathematica



وكانت طريقة جوديل تتمثل في : قام بتخصيص رقم محدد لكل جزء في الجمل الرياضية ، بعد ذلك قام بدمج هذه الأرقام ليحصل على رقم واحد لكل جملة رياضية . وعن طريق مناقشة مشابهة لمناقشة كانتور قام جوديل بتوليد رقم «عملاق» يعبر عن هذه الجملة . وكان هذا الرقم مليئاً بالمعاني ولكنه لم يتم إثبات صحته أو بطلانه.



حلم جوديل
بأن الرياضيات من
الممكن أن تمثل على
هيئة صرح من الحقائق
المتصلة منطقياً ، انتهى
فجأة وإلى الأبد.

ماكينة "تورينج"

انبثقت من نظرية التحطيم العظيم لجوديل أنواع مختلفة من القوى . وقد التقط ألان تورينج (١٩١٢ - ٥٤) فكرة توليد جمل رياضية بطريقة مختصرة تماماً.

وتتكون ماكينة تورين من شريط وبرنامج يستجيب للمعلومات المتتابعة المخزونة في مقاطع مختلفة من هذا الشريط وهي تقوم بكل العمليات الابتدائية. وبلغه

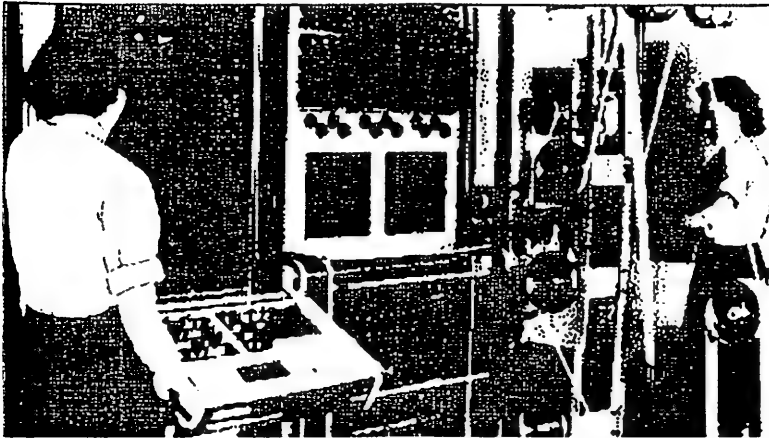


تكنولوجيا الثلاثينات من القرن الماضي لم يكن لهذه الآلة استخدام عملي ولكنها أمدت تورينج بإصدار من طريقة جوديل التي كان يحتاج إليها في بحثه. وفي القريب العاجل أصبحت تخيلات تورينج عملية جداً حيث إنها أصبحت دليل تطوير الحاسبات في أثناء الحرب العالمية الثانية .

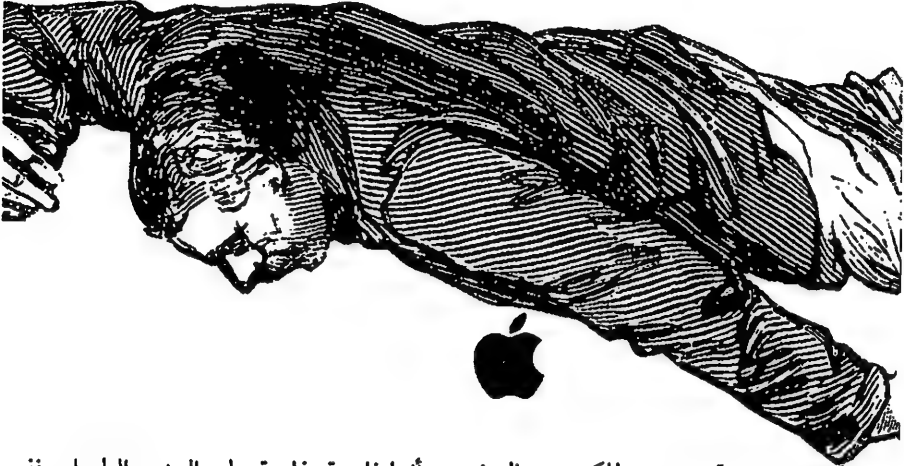
وقد بدأت الحاسبات على صورة آلات حاسبة

ضخمة يتم تشغيل البرنامج عن طريق الضغط على أزرار ومفاتيح من الخارج . وكان التطور الهائل عندما تم تحميل البرنامج داخل الحاسب على أنه أحد ملفات البنائية والذي يقوم بتوجيه العمليات في كل الملفات الأخرى . ولا توجد الآن حدود لتعقيدات وقابلية تكيف الحاسب.

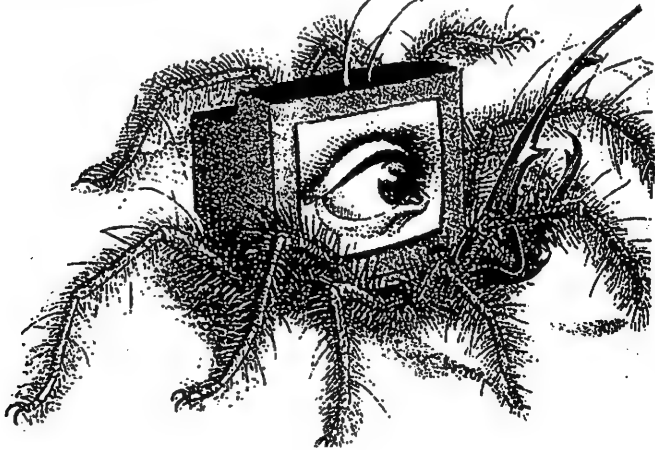
أصبحت لدى
مميزات الحاسب، الذي
يختلف اختلافاً تاماً عن
الآلات الحاسبة
الميكانيكية.



وقد ساعد تورينج فى كسب الحرب العالمية الثانية حيث إنه كان ضمن الفريق الذى كسر شفرة «الغز» الألمانى ماكينة الشفرة .
وقد مات تورينج بصورة مأساوية وبالتحديد كنتيجة لاضطهاده ومحاكمته وقد تم تسميته بسم السيانياد حيث وجدت بجانبه التفاحة المسممة مأكول منها قضمة.



وقد بدت رؤية تورينج للكمبيوتر المختصر أنها فادحة خاصة على المدى الطويل. ففى مخططة للعمليات البسيطة لم يكن هناك مكان خصص لبرمجة الأخطاء أو الحاجة «لمعالجة الأخطاء» . وقد دام الاعتقاد بأن الحاسبات لا تخطئ لمدة قرون، بمعنى أن أى خطأ هو نتيجة لأخطاء البشر. والآن فقط وبعد اكتشاف Millennium Bug بدأنا نتحقق الأنظمة المختصرة لنظرية الحاسبات وبرمجتها ليست حقائق إلهية، ولكنها أيضاً منتجات بشرية.



الفراكتالات

تظهر الآن قوة الكمبيوتر في الرياضيات نفسها ، حيث قادنا الرسم بالكمبيوتر إلى نوع جديد من الهندسة يُعرف بهندسة الفراكتالات والذي يتكون من أنواع خاصة من الأشكال غير المنتظمة المتشابهة في ذاتها، بمعنى أن أي نظام جزئي من نظام الفراكتال يكون مكافئاً للنظام ككل.

الفراكتالات

هي إنشاءات جميلة جداً
وعلى درجة عالية من
التعقيد وأيضاً بسيطة جداً
تعتبر الفراكتالات
معقدة نتيجة التفاصيل
اللانهاية التي تحتويها

والخصائص الرياضية المنفردة
لا يوجد فراكتالات متماثلات أبداً
ونعتبر بسيطة لأنها تنتج بواسطة عملية بسيطة جداً.

وإذا بدأنا بمعادلة بسيطة مثل $2 + x$ حيث إن x رقم مركب يسمح له بالتغير بينما x رقم مركب ثابت . نقوم بوضع قيمتين (x ، y) ونبلغ الحاسب بوضع الناتج محل x في الخطوة التالية ثم يكرر ذلك في الخطوات المتتابعة ، وتكون النتيجة مذهلة.

وقد وصف بينوا ماندلبرو (المولود عام ١٩٢٤) عالم الرياضيات الفرنسي (البولندي الأصل) مكتشف الفراكتلات على أنها طريقة لرؤية اللانهاية.



يرتبط اسمي
بالفراكتال الشهير
المرسوم في صفحة
١٤٩ والمسمى بـ
«فئة ماندلبرو».

وفي هذه الأيام تستخدم الفراكتلات في وصف الظواهر المعقدة مثل اضطرابات توزيع الزلازل وتطور المدن. وقد أدت هندسة الفراكتلات إلى الفرع الرياضي الجديد نظرية العماء.

نظرية العماء

تقوم نظرية العماء بوصف ظواهر ليست عشوائية ولا يمكن التنبؤ بها وفي نفس الوقت فهي تُوصَف بواسطة المعادلات التفاضلية. وينتج هذا السلوك لأن أى تغيير بسيط فى الشروط الابتدائية يؤدي إلى تغيير كبير جداً فى سلوك الحلول النهائية . والوصف التقليدى (المبالغ فيه حقيقة) لهذه الخاصية.

هو ...

... رفرفة أجنحة
الفراشة من الممكن
أن تؤثر على مسار
العاصفة.



والسلوك العمائي يرتبط ارتباطاً وثيقاً بخصائص فراكتال الأنظمة وحيث إنها «ذاتية التماثل» فإننا نرى نفس نوع التغير إذا غيرنا المقياس الذى نصف به سلوك النظام . وقد وضح أن المتغيرات العشوائية ، مثل تغير الأسعار فى أسواق الجملة ، تسلك نفس هذا السلوك . وهذا يمكننا من استخدام نظرية العماء فى إدارة مثل هذا النوع من المشاكل .

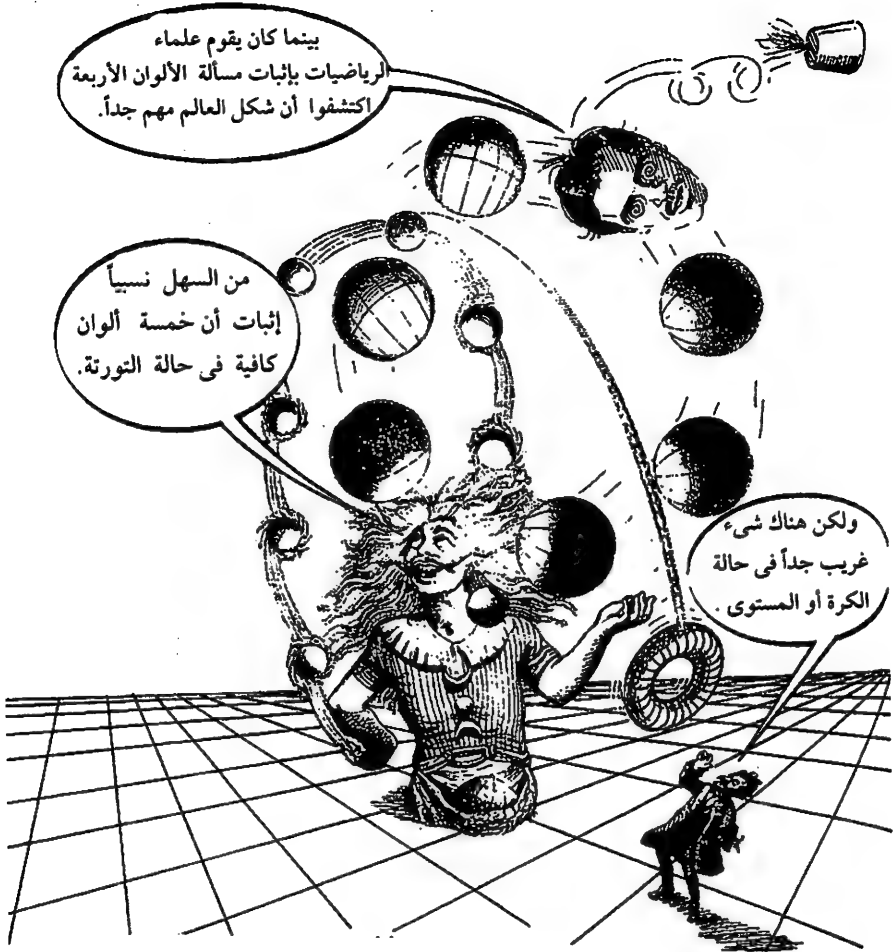


الطبولوجى

تظهر الآن قوة الحاسبات فى مجالات أخرى ملحوظة أكثر، فقد قامت الحاسبات بالبراهين التى وقف أمامها العقل البشرى عاجزاً . وأكثر الحالات الشهيرة المعاصرة هى الطبولوجى . يهتم علم الطبولوجى بدراسة العلاقات بين التكوينات بغض النظر عن أشكالها . وبصيغة رياضية فإن هذا المجال هو المجال الرياضى الذى يسهل فيه ذكر المشكلة ولكن يصعب جداً حلها.

وواحدة من أصعب التحديات فى مشاكل الطبولوجى هى «نظرية الألوان الأربعة» والتى تنص على أن أى خريطة يمكن تلوينها بواسطة أربعة ألوان على الأكثر . والقاعدة الوحيدة هى عدم تشارك دولتين متجاورتين نفس اللون . والتقييد الوحيد هنا هو أن كل دولة تكون عبارة عن قطعة منفردة ومتصلة من الأرض ولا يوجد أى دولة تحتوى على دولة بداخلها على هيئة جزيرة كما فى حالة إيطاليا وسويسرا بالقرب من لوجانو Lugano



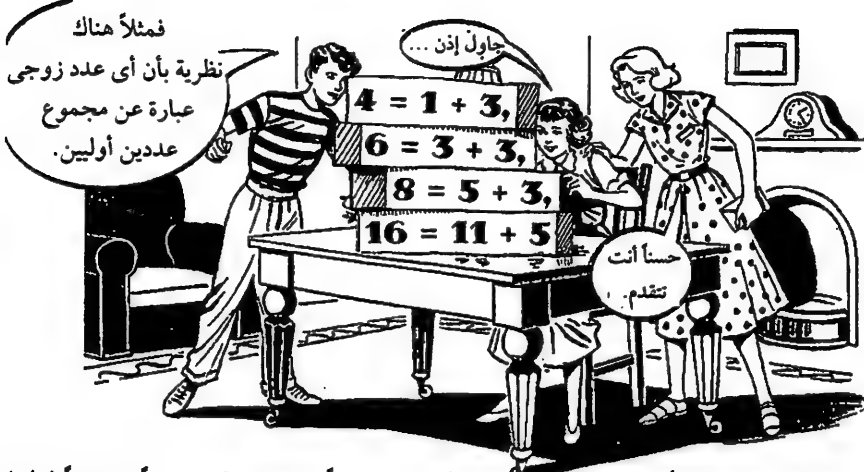


وقد تم التوصل إلى إثبات في عام ١٩٧٦ ، ولكنه اعتمد على دراسة مفصلة لأكثر من ألف حالة وهى شىء خارج حدود استطاعة الإنسان. لذلك فقد تم تصميم برنامج كمبيوتر لاختبار الحالات الخاصة فى وقتها وقد نجح فى ذلك وأعطى النتائج المرجوة.

ولكن فى ذلك الوقت اشتكى بعض علماء الرياضيات من أنهم لا يستطيعون اختبار الإثباتات ! حيث إن برنامج الكمبيوتر عبارة عن مجموعة من الأوامر وليس جملاً متصلة منطقياً . هل نستطيع أن نجزم بأن برنامجاً ما قد تمت معالجته من الأخطاء أكثر من برنامج آخر ؟ وفى الحال تم التوصل إلى إجماع على مفاده وأصبح الإثبات الآن «متحققاً»

نظرية الأرقام

وكما في حالة الطبولوجي فإن المشاكل في نظرية الأعداد سهلة الوصف ولكنها صعبة الحل .



إثبات ذلك لكل الأعداد الزوجية يعتبر عملية صعبة جداً . وكان هذا تحدياً حقيقياً لعلماء الرياضيات لفترة طويلة. وأول محاولة ناجحة لحل هذه المشكلة والمعروفة . بـ«حدس جولد باخ» بينت أننا لسنا بحاجة لأكثر من ٤٠٠٠٠٠٠ عدد أولي !



وأشهر نظرية في هذا المجال هي التي وضعها عالم الرياضيات الفرنسي بيير دي فيرما (١٦٠١ - ٦٥) .



وقد نتجت هذه النظرية من دراستي لأقدم علاقة رياضية وهي نظرية فيثاغورث، وحيث إنه هناك عدد لا نهائي من الحلول للمعادلة ...

$$٢١ + ٢ = ٢ جـ ٢$$

حيث أوب و ح أعداد صحيحة وإنشاء مثل هذه الثلاثيات كان معروفاً لمدة قرون مضت..

وقد رأينا أن علماء الرياضيات المسلمين فكروا في معادلات شبيهة ولكن بأسس أعلى. وقد حاول بعضهم إثبات استحالة وجود مثال لأرقام تحقق المعادلة: $٣س + ٣ص = ٣ع$.

ولكن بيير دي فيرما اعتقد أنه قد توصل إلى مثل تلك المجموعات متصوراً أنه قد أثبت أن المعادلة $س + ص = ع$ ن .

ليس لها حلول على صورة أعداد صحيحة إذا كانت ن أكبر من اثنين.

وقد كتب لأحد أصدقائه أنه قد توصل إلى إثبات دقيق لهذه النقطة ولكن هامش الخطاب لم يستوعبه ! لذلك فإنه قد بدأ مطاردة استمرت لقرون ولم تنته إلا حديثاً. وقد تم التوصل إلى هذا الإثبات بواسطة عالم الرياضيات الإنجليزي أندرو ويلز (المولود عام ١٩٥٣) الذي يقوم بالتدريس الآن في جامعة برينستون.



نضمن هذا الرياضيات العميقة المهمة عبر آلاف السطور التي تحتوي على مئات الحسابات والاتصالات المنطقية.

ويؤدي كل هذا إلى توضيح أن العقل البشري يستطيع أن يتوصل إلى ما لا يستطيع الكمبيوتر التوصل إليه.

وقد أصبحت نظرية الأعداد واحدة من أقل فروع الرياضيات قابلية للتطبيق. ولكن أثناء تطور المجالات المختلفة فإن هناك تفاعلات بينها بطرق غير متوقعة.

علم تخطيط الشيفرة
(عمل وكسر الشفرات) كان هاماً
فقط بالنسبة للجنود والجواسيس.

ولكنه أصبح فجأة على درجة عالية من
الأهمية التجارية والتكنولوجية والسياسية في
تأمين الرسائل عبر الانترنت والذي يعتمد
كلياً على صعوبة كسر شفرتها.



يجب فعل
شيء ما.

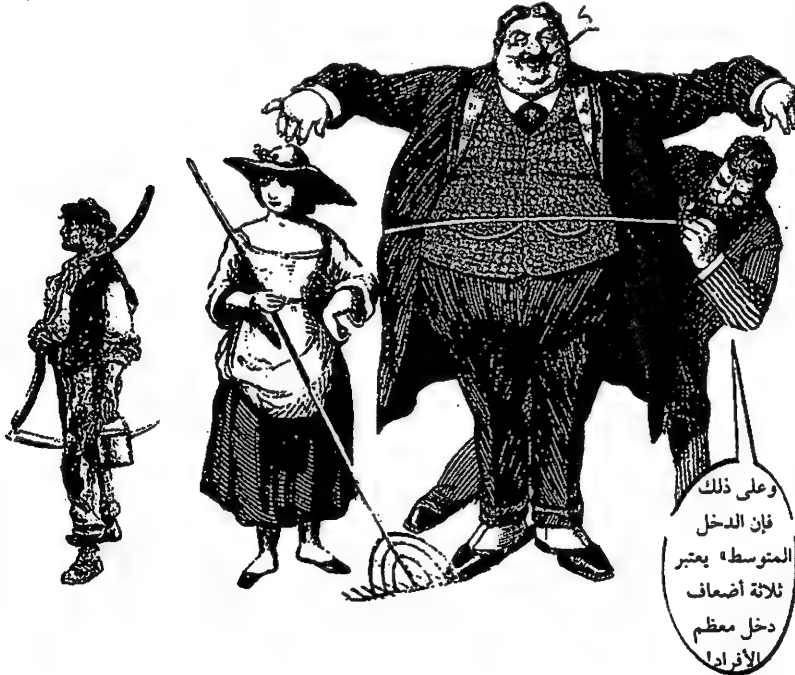
وأفضل طريقة لعمل الشفرات هو استخدام أرقام كبيرة
جداً لا يمكن حساب مكوناتها. وعملية تعريف هذه الأرقام
ووضع طرق لإنشائها وكسرها تتضمن العمل بنظرية
الأعداد والمجموعات. لذلك فإن أكثر العلوم ميلاً لأن
تكون نظرية أصبحت الآن في لب التطبيق العملي. وقد
أصبحت هذه المشكلة على درجة عالية من السياسة حيث
إن الحكومات تهتم بحل شفرات الرسائل المتبادلة بين
المجرمين والإرهابيين.



الإحصاء

علم الإحصاء هو أكثر نقاط الرياضيات شيوعاً واتصلاً بالأفراد العاديين. ويعنى علم الإحصاء «فن الحكم» حيث إن الحكومات تستطيع أن تقوم بأعمالها على وجه حسن إذا تمكنت من جمع معلومات عما يدور في مملكتهم. ولكن مجرد جمع أرقام متضاربة ليس بالعمل الكافي إنما يجب أن نقوم بربط وتحليل وتلخيص هذه الأرقام حتى تصبح مفيدة. وفي هذا العمل سنقوم باستخدام كل المقاييس المختلفة للإحصاء مثل «المتوسط» ولكن مثل هذه المقاييس تعتبر مثلاً لمجموعة من الأرقام وبينما نقوم بتوضيح بعض الأرقام في وقت ما فهي أيضاً تقوم بإخفاء مظاهر البعض الآخر. ولمعرفة كيفية تطبيق الإحصاء دعنا نتخيل قرية بها :

مائة قروي يتكسبون	وعشرة مزارعين يتكسبون	بالإضافة إلى سيد القرية الذي
١٠٠ دولار في السنة	١٠٠٠ دولار في السنة	يجنى ١٠٠٠٠ دولار في السنة.



والدخل الكلي لهذه القرية يصبح ٣٠٠٠٠ دولار ، وإذا قسمناه على ١١١ فرداً ، فإنه يعطى ٢٧٠ دولاراً في السنة لأغلب الحالات.

وإذا أخذنا في اعتبارنا الدخل المتوسط (حيث يوجد ٥٪ فقط لهم دخل أكبر) أو الأسلوب السائد (وهو الدخل الذي يتكسبه معظم الناس) . وفي كلتا الحالتين سيكون ذلك ١٠٠ دولار فقط أى أنه يتجاهل دخل الأشخاص الأكثر ثراءً. ولكي نقوم بتوضيح صورة الدخل على نحو أفضل فربما نتجاهل الأعشار العليا أو السفلى (مستوى ١٠٪ و ٩٠٪) وبالنسبة لعشر ٩٠٪ فإنه يلحق بالفرض الحادى عشر من أعلى وهو الدخل الأوسط.



قيم «أ»

فى كل اختبارات الإحصاء يوجد رقم يتم الاستشهاد به يسمى «حد الثقة» أو «قيمة أ» وهو يأخذ قيم ٥٪ أو ١٪ أو أى قيمة أخرى . وهذا الرقم يحدد درجة التأكد من أن هذا الاختبار يتوافق مع مجموعة الأرقام التى يتعامل معها. وهذا الرقم يعبر عن الأرقام الشاذة التى تعطى نتائج إيجابية ولكنها خاطئة . ولا يوجد اختبار يعطى نتائج مثالية! فكلما ازدادت درجة التأكد زادت تكلفة هذا الاختبار وهذا يعنى أنه يتعين على القائمين على اختبارها أن يتقبلوا كل أنواع الخطأ الممكنة.

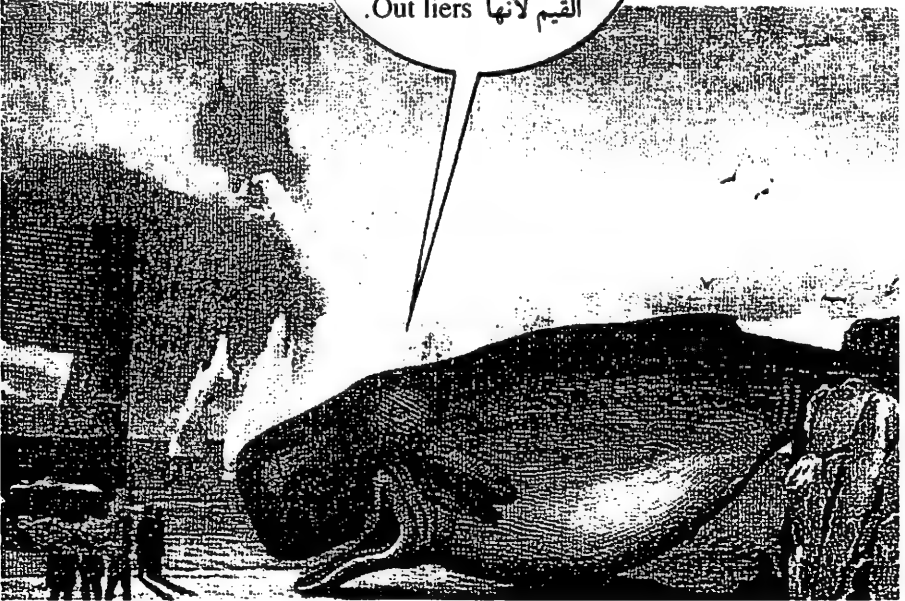


ذلك معنى أن هناك إقراراً بأن قيم أ يتم تصميمها بحيث إنها تحد من فرصة النتائج الإيجابية الخاطئة . وكلما زادت صرامة قيمة أ ازدادت اختيارية الاختبار ولكن على الجانب الآخر فإنها تجعله أقل حساسية . ففي مثال اختبار سمية بعض الملوثات البيئية فإن قيمة أ التي تُقدر بـ ٩٥٪ تجنبنا الإنذارات الخاطئة للملوثات ولكنها في نفس الوقت تجعلنا أكثر عرضة للأضرار الكاذبة . لذلك فإنه يتعين علينا أن نسأل أنفسنا أثناء القيام ببعض الاختبارات الواجبة : هل بعض المواد بالفعل لها آثار ضارة أم أن الآثار المنذرة يجب قبولها على أية حال؟ وفي كلتا الحالتين يجب اتخاذ إجراء وقائي.

والسؤال المحتوم في هذه الحالة هو : لمصلحة من تتم هذه الاختبارات؟

وحتى في الاستخدامات الأبسط للإحصاء كما في عملية تمثيل المعلومات التجريبية فإنه يتعذر علينا الحكم على القيم. بالطبع لا تتلازم كل النقاط مع المنحنى المرسوم وإلا إذا كانوا قريبين جداً فهذا يعنى أنها قيم ملفقة . وكذلك هناك بعض القيم تبعد تماماً عن باقى الحشد ونسمى هذه القيم "Out liers" وإذا تم إدراجهم مع القيم فسوف يؤثرون بالسلب لذلك فيجب تجنبهم بعد التأكد من أنهم لا ينتمون إلى هذه الفئة (ربما نتيجة خطأ ما في القياس).

لم نكن نعرف أول
دليل على وجود ثقب الأوزون ،
وكان ذلك نتيجة أن نظام الإحصاء
في الحاسب يتجنب بعض
القيم لأنها Out liers .



الاحتمال

تُبنى طرق التعامل مع البيانات الإحصائية بصورة أساسية على نظرية الاحتمال .
ويتضمن هذا ثلاثة مبادئ واضحة والتي تتداخل مع بعضها بصورة متكررة.





تتطلب الأحكام ، على «توجيه» قطعة النقود، النظرية الرياضية للاحتمال والإحصاء .
 وفى هذه الحالة سيصاحب الافتراضات عن سلوك قطعة النقود تصميم تجريبى
 بالإضافة إلى تقييم مقادير الخطأ ووضع حدود يقينية للأحكام النهائية. ويقودنا تحليل
 إلقاء قطعة النقود بعد توضيحه إلى مجموعة من النتائج الخطيرة . فبينما تبدو صيغة
 السؤال المباشر أنها نص بسيط للاحتمال (الصور والكتابة لهم احتمالات متساوية فى
 القطعة غير الموجهة) ، فالصيغة العكسية (هل القطعة موجهة؟) تتضمن أحكاماً مدغمة
 بواسطة علم الإحصاء.

عندما تبرز النقاشات الإحصائية بمبدأ
 المسبب نجد أن هناك ارتباطات فى كل مكان
 ، فهناك قصة عن رجل لا يحب السفر بالطيران
 أبداً....



لن نغير هذه الفكرة
 الخاطئة من قصد الإرهابيين...
 احتمالية وجود قنبلة أخرى لم
 تتغير حتى مع وجود هذه
 القنبلة ولا تزال واحداً
 فى المليون كما سبق.

وتنتهى قصتى على
 النحو التالى :

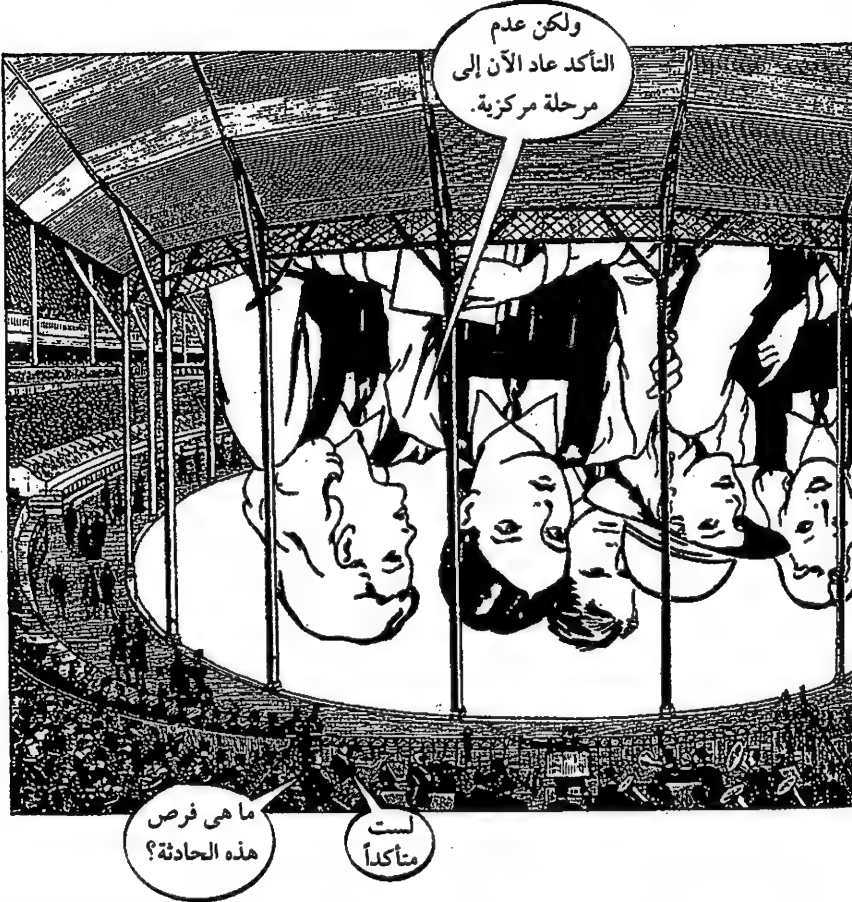
عدم التأكد

يقع هؤلاء المختصون بإمداد الأرقام سواء إذا كانت إلى السياسيين أو إلى عامة الشعب في ورطة كبيرة ، فإذا قاموا بتوضيح عدم التأكد والتحفظات حول أرقام معينة لن يكون ذلك مفهوماً.

وعلى الجانب الآخر إذا قاموا بتبسيط العملية وذكروا «أرقاماً ساحرة» على قدر أمان كبير فسوف يدعى الناس عليهم بالخداع.



ويكمن التحدى العظيم للرياضيات من الناحية الاجتماعية فى إدارة وتنظيم عدم التأكد. ولقد ساد الاعتقاد لفترة طويلة بأن تقدم العلوم الطبيعية من الممكن أن يقلل أهمية عدم التأكد والتي ظلت لها إمكانية الترويض بواسطة نظرية الاحتمال.



وقد قام عدم التأكد بقهر الرياضيات، وعلى الجانب الآخر فهو أساس لـ «نظرية الكم» فى الفيزياء .. وفى هذه الأيام علينا أن نتحدى آثار الحضارة الصناعية على البيئة الطبيعية.

وقد أصبح عدم التأكد فى المقدمة لأول مرة. وتعتبر تسمية أخرى جديدة فى الرياضيات بـ «النكبة Catastrophe» أو «العماء Chaos» غير مدهشة. والآن نستطيع أن نضع عدم التأكد ضمن أفكارنا التى توضح ما تتضمنه الرياضيات.

الأرقام السياسية

يعتبر فهما للأرقام (والتي تم وضعها للعد والحساب) غير ملائم بالنسبة للأرقام المستخدمة في صنع السياسة. هذه الاستخدامات تتطلب مفهوماً ومهارات مختلفة. وبسبب اعتيادنا الدائم على كون الرياضيات دقيقة وصحيحة، فإننا لا نميل إلى تصديق أن عدم التأكد يعتبر جزءاً من الأرقام السياسية. وقد أدى الذكر الدقيق للأرقام في وسائل الإعلام إلى إيقاع عدم التأكد في أزمة كبيرة. وعلى كل حال فإذا ذكرنا رقماً ما مكوناً من خانتين مثل ٤٧ فإننا نعرف أنه مختلف عن ٤٦، ٤٨ أو أننا نعرفه بدقة حوالي ٢٪.



وإذا كان الرقم ٤٧ هو حد آمن تم حسابه من كل أنواع البيانات بكل أنواع التفسير، فما هي فرصة أننا نعرفه بدقة حوالي ٢٪.



الدقة الزائدة محيرة ومضللة ويعانى من استخدامها كل من المستخدم والأشخاص الذين يمدونهم بها.



وتعتمد تأثيرات الأرقام الملحوظة على صنع السياسة على محتوى تلك الأرقام. وهناك حوار في الكتاب المقدس تم فيه عرض تعقيد مذهل، في جينسى ١٨ ، كان أبراهام والسيد قبل مدينتى «سدوم» و«جموره» وقال السيد ..



وعلى ذلك فقد نقل أبراهام النقاش

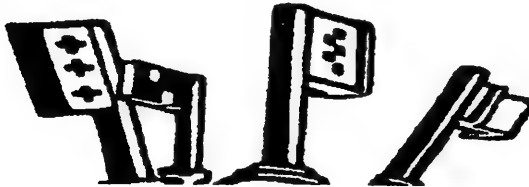
إلى مستوى آخر، فهو الآن ليس عن السياسة (العفو عن المدينة إذا كانت هناك أرواح صالحة) ولكنه عن التحقيق (ماذا يحدث لو أننا أقل من النسبة؟) في هذا النص نجد أن خمسين ليس عدداً ولكنه رقم سياسى يتضمن تفاوتاً ما. وقد كان رأى أبراهام أن ٤٥ يقع داخل هذا التفاوت . هل بالتأكيد سيقوم السيد بتدمير المدينة لتقص خمسة، والتي ظهر من النص أنها أقل من حد الملاحظة؟ وفي النهاية استسلم السيد، وذلك ربما لأنه لاحظ مهارة خصمه، وجعل الحصنة تقل إلى عشرة أرواح صالحة. وبحكمة لم يقيم أبراهام بأى مساومات أخرى.





وتوضح قصة «إنقاذ سدوم» أن الأرقام يمكن أن يكون لها معان كثيرة مختلفة في النقاش . فترتبط «خمسون» بالتقدير أما «خمس» أو «خمس» وأربعون» فترتبط بتفاوت هذا التقدير. ويعتمد الاختلاف بين «خمس» و«خمس» وأربعين» على النص. وربما تتم ملاحظة هذا الفرق (إذا كان خارج التفاوت) في أوقات ما ولا يلاحظ في أوقات أخرى. وبالرغم من أن المثال كان عن الأرقام السياسية ولكن نقطة أن المعنى يعتمد على النص تتحقق في كل التقديرات والقياسات.

ويمكن ملاحظة نفس الظاهرة في «تناقض المفتاح» عندما يستخدم شخص مفتاحاً جديداً للقفل ما فإنه يكون متوافقاً معه، وإذا قام أحدهم بعمل نسخة منه فإن هذه النسخة تتوافق أيضاً مع القفل لأن سماحية الآلة كانت قريبة من سماحية القفل. ولكننا نلاحظ أنه بعد تكرار النسخ من النسخ تتابعياً فإن النسخة الأخيرة لا تتوافق مع القفل وذلك لأنه تم تراكم سماحيات الآلة في كل مرة. وبدلالة القياس نجد أن $C=B=A$ ولكن $K=A$. ويبدو هذا جنوناً بدلالة الحسابات العادية ولكنه يوضح أن الأرقام في حالة القياس والتقدير يكون لها معنى فقط بناءً على محتوى النص ولا تعني نفس المعنى في حالة العد البسيط.



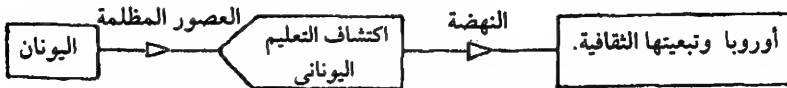
الرياضيات والمركزية الأوروبية

لقد لعبت الرياضيات الأوروبية دوراً هاماً في الوعي الذاتي لأوروبا أي الإحساس بأن الثقافة الأوروبية هي الأعظم وأنها هي الحقيقة الوحيدة. ويرى الناس الذين يعتقدون أن الرياضيات عالمية أنه من الصعب أن تكون الرياضيات والإمبريالية تماشوا جنباً إلى جنب. ولكن الرياضيات قد تم استخدامها كوسيلة لتحقيق سفلية ووضاعة الثقافات غير الأوروبية.



قامت أوروبا باستخدام
ثلاث طرق لنشر المركزية
الأوروبية في الرياضيات.

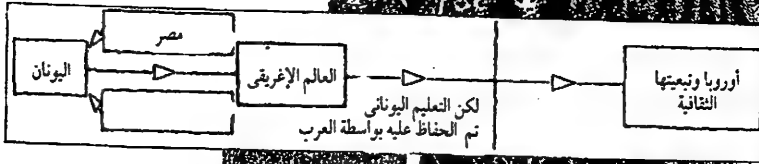
١- قامت باستخدام إسهامات الثقافات غير الأوروبية وفي نفس الوقت أخفعتها. لم يكن هناك أي تقدم قبل معجزة اليونان وأيضاً في الفترة بين ذلك والنهضة الأوروبية في القرن السادس عشر. وهذا هو المبدأ التقليدي للمركزية الأوروبية.



قامت أوروبا بتعريف الرياضيات بطريقة معينة
وأعلنت أن مساهمات الحضارات الأخرى لم تكن
رياضيات حقيقية.

فقد تم وصف الأساليب الرياضية غير الأوروبية بأنها
كانت تعتمد على التجريب كليةً وبالتالي فهي ليست
رياضيات تأملية حقيقية.

ولكن العرب
كانوا على درجة كرم كافية
لحفظ الميراث اليوناني من
الرياضيات التأملية وإمراره إلى
ورث اليونان الشرعي!
علماء الرياضيات الأوروبيين في
عصر النهضة



٣- وشرَّعت أوروبا
الرأي القائل بأن التطور
الرياضي كان نتاجاً
أوروبياً بصورة خالصة
وقامت بتدريس ذلك في
تعليم الرياضيات .

جورج غيفرغيز
يوسف عالم تاريخ
الرياضيات وهو بريطاني
آسيوي.

وحتى في
هذه الأيام فإن
الرياضيات يتم
تدريسها على أنها
أيدولوجية إمبريالية



وقد أعدت
الخبرة الإمبريالية الطلاب
للاعتقاد بأنه ليس هناك مجال
للتفكير في أن غير الأوروبيين
يستطيعون إنتاج معرفة رياضية
وقد شجعت الأسطورة القائلة بأن
الرياضيات كانت هبة حضارية
نقلتها أوروبا إلى مستعمراتها
وومضة برومائية جعلت
بعض الأفراد المتخلفين
يخترقون أسرار العلم والتكنولوجيا
لدخول العصر
الحديث.

الرياضيات العرقية



فهي تهدف إلى إقامة علاقة قوية بين الرياضيات والثقافة والمجتمع وتذكرنا بأن الرياضيات تحتوى على أشياء أكثر من الدراسات المجردة النظرية الأفلاطونية ومناهج التدريس المشتقة منها. ويمكننا أن نرى المقدار الكبير الذى أثرت به أشكال الإبداع والابتكار فى الطرق المختلفة التى يتناول بها الأفراد المختلفون الأمور الرياضية.



لذلك فإن الرياضيات العرقية لا تتضمن الأنظمة الصياغية الرمزية فحسب ولكن أيضاً التصميم المكاني وطرق الإنشاء العملية وطرق الحساب والقياسات في الزمن والمكان وطرق معينة للفهم والإشارة ونشاطات مادية ومعرفية أخرى.



الرياضيات ونوع الجنس

والنساء القلائل الذين أتحت لهم فرصة المشاركة في الرياضيات في العصور الماضية كانوا مجرد طرفة. وأحد عالمات الرياضيات هي الفرنسية صوفي جيرماين



لسوء الحظ، ولكنه حقيقي،
ميراثنا الرياضي تم إيداع
الجزء الأكبر منه بواسطة
«الرجل الأبيض»

(١٧٧٦ - ١٨٣١) والتي قدمت
نفسها على أنها رجل من
خلال نقاشها مع عالم
الرياضيات الألماني «كارى
فريدريك جاوس». (١٧٧٧
- ١٨٥٥).



تم إنشاء سرى عندما دخل
جيش نابليون مدينة جوتينجن
واستخدمت نفوذى لتأمين
سلامته

كنت مذهولاً عندما قدم القائد
الفرنسى اعتذارات الآتية جيرمان
لى، كنت أعتقد أن رفيقى فى
باريس هو رجل شاب

وقد قدم علماء علم النفس العديد من الأسباب التي أدت إلى وضاعة
النساء فى الرياضيات.

ولكن الآن هؤلاء
الفتيات يلون فى الرياضيات
بلاءاً حسناً أكثر من الأولاد وقد
قبل إن هذه مشكلة اجتماعية
تحتاج إلى حل عاجل



أين الآن

لقد سادت وجهة النظر الأفلاطونية للرياضيات في الثقافة الغربية على مدى العصور.

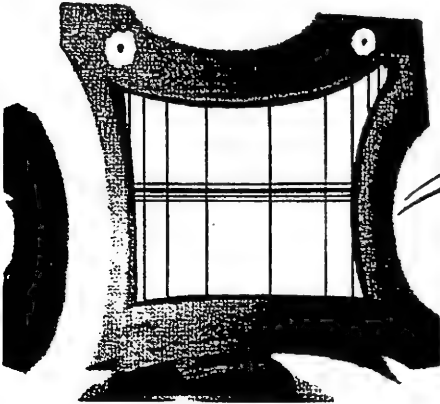
ووجهة النظر هذه كانت
عن المعرفة المتحررة من
التمرين والتي تقترب
من الحقيقة وتحرر من
التعارضات

وهناك العديد من
المفارقات بين وجهة
النظر والحقيقة تم نزعها
من هذه الرؤية

ويقوم الفلاسفة والمدرسون
والمشيعون بتقديم الرياضيات
بهذه الوجهة الأفلاطونية . وتم
تخيّل العلم على أنه تطبيق
للحقائق الرياضية . وكجزء من
هذه الصورة ، تم تجاهل أو
تشويه إسهامات الثقافات الغير
أوروبية في الرياضيات.



وبالرغم من
أن البحث الرياضى
قد تجاهل مبادئ عدم
التأكد فى الفكر الرياضى
إلا أن ظهور الحاسبات
الآلية جعل الرياضيات الحاسوبية
المبنية على التجريب تتألف
مع النظرية



وبغض النظر عن انتشار معرفة القراءة والكتابة إلا أنها لا تزال مقتصرة على صفوة الاجتماعيين والمنقفيين .



وتحت هذه الظروف فمن الضروري لنا أن نعرف ونقدر فشل الرياضيات (من خلال العلم) في انتزاع عدم التأكد من العالم العملي من حولنا. ومن الضروري أيضاً أن نعيد التفكير في المعرفة الحقيقية وكيفية تحقيقها.

لذلك فإن الرياضيات تواجه تحديات جديدة. وعلى المواطن أن يقوم بدوره في مواجهة هذه التحديات. ففي كلمات الأسقف بيركلي: كل واحد.....



المحتويات

الموضوع	الصفحة
مقدمة	5
لماذا الرياضيات	9
الحساب	13
الأرقام المكتوبة	19
الصفر	30
أرقام خاصة	33
الأرقام الكبيرة	37
الأسس	39
اللوغاريتمات	43
الحساب Calculation	45
المعادلات	48
القياس	54
الرياضيات اليونانية	60
فيثاغورث	61
متناقضات «زينو»	63
إقليدس	65
الرياضيات الصينية	68
تشو تشانج	70
أربعة علماء رياضيات صينيون	71
الرياضيات الهندية	74
هندسة «الفيدا»	75
براهما جوبتا	77
أرقام جاين	78
اندماجات «فيديك» و«جاين»	79
الشعر الرياضى	80

82 رامنوجان
83 الرياضيات الإسلامية
84 الخوارزمي
85 تطوير الجبر
88 اكتشاف حساب المثلثات
89 البطاني
90 أبو وفا
91 ابن يونس وثابت بن قرة
92 الطوسي
93 حل المسائل التي تتضمن أرقاماً صحيحة
94 نشأة الرياضيات الأوروبية
97 رينيه ديكارت
99 الهندسة التحليلية
102 الدوال
107 التفاضل والتكامل
108 التفاضل
111 التكامل
117 أسئلة بيركلي
120 إله أولر
124 علوم الهندسة اللاإقليدية
126 الفضاءات نونية الأبعاد
128 إيفارست جالوا
129 المجموعات
132 العمليات الجبرية على الفئات
135 كانتور والفئات
141 أزمة في الرياضيات
142 راشيل والحقيقة الرياضية
145 نظرية «جوديل»

147	ماكينة «تورينج».
149	Fractals الفراكتلات
151	نظرية العماء
153	الطبولوجى
155	نظرية الأرقام
158	الإحصاء
160	قيم - «أ»
162	الاحتمال
165	عدم التأكد
167	الأرقام السياسية
170	الرياضيات والمركزية الأوروبية
172	الرياضيات العرقية
174	الرياضيات ونوع الجنس
175	أين الآن؟
178	فهرس

المشروع القومى للترجمة

المشروع القومى للترجمة مشروع تنمية ثقافية بالدرجة الأولى، ينطلق من الإيجابيات التى حققتها مشروعات الترجمة التى سبقته فى مصر والعالم العربى ويسعى إلى الإضافة بما يفتح الأفق على وعود المستقبل، معتمداً المبادئ التالية :

- ١ - الخروج من أسر المركزية الأوروبية وهيمنة اللغتين الإنجليزية والفرنسية.
- ٢ - التوازن بين المعارف الإنسانية فى المجالات العلمية والفنية والفكرية والإبداعية.
- ٣ - الإنحياز إلى كل ما يؤسس لأفكار التقدم وحضور العلم وإشاعة العقلانية والتشجيع على التجريب.
- ٤ - ترجمة الأصول المعرفية التى أصبحت أقرب إلى الإطار المرجعى فى الثقافة الإنسانية المعاصرة، جنباً إلى جنب المنجزات الجديدة التى تضع القارئ فى القلب من حركة الإبداع والفكر العالميين.
- ٥ - العمل على إعداد جيل جديد من المترجمين المتخصصين عن طريق ورش العمل بالتنسيق مع لجنة الترجمة بالمجلس الأعلى للثقافة.
- ٦ - الاستعانة بكل الخبرات العربية وتنسيق الجهود مع المؤسسات المعنية بالترجمة.

المشروع القومى للترجمة

- ١- اللغة العليا (طبعة ثانية)
- ٢- الوثنية والإسلام
- ٣- التراث المسروق
- ٤- كيف تتم كتابة السيناريو
- ٥- ثريا فى غيبوبة
- ٦- اتجاهات البحث اللساني
- ٧- العلوم الإنسانية والفلسفة
- ٨- مشعلو الحرائق
- ٩- التغيرات البيئية
- ١٠- خطاب الحكاية
- ١١- مختارات
- ١٢- طريق الحرير
- ١٣- ديانة الساميين
- ١٤- التحليل النفسى للأدب
- ١٥- الحركات الفنية
- ١٦- أثينة السوداء
- ١٧- مختارات
- ١٨- الشعر النسائي فى أمريكا اللاتينية
- ١٩- الأعمال الشعرية الكاملة
- ٢٠- قصة العلم
- ٢١- خوخة وألف خوخة
- ٢٢- مذكرات رحالة عن المصريين
- ٢٣- تجلى الجميل
- ٢٤- ظلال المستقبل
- ٢٥- مثنوى
- ٢٦- دين مصر العام
- ٢٧- التنوع البشرى الخلاق
- ٢٨- رسالة فى التسامح
- ٢٩- الموت والوجود
- ٣٠- الوثنية والإسلام (ط٢)
- ٣١- مصادر دراسة التاريخ الإسلامى
- ٣٢- الانقراض
- ٣٣- التاريخ الاقتصادى لإفريقيا الغربية
- ٣٤- الرواية العربية
- ٣٥- الأسطورة والحداثة
- جون كوين
- ك. مادهو بانيكار
- جورج جيمس
- انجا كاريتنكوفا
- إسماعيل فصيح
- ميلكا إفيتش
- لوسيان غولدمان
- ماكس فريش
- أندرو س. جودى
- جيرار جينيت
- فيسوفا شيمبوريسكا
- ديفيد براونستون وايرين فراث
- روبرتسن سميث
- جان بيلمان نويل
- إدوارد لويس سميث
- مارتن برنال
- فيليب لاركين
- مختارات
- جورج سفيريس
- ج. ج. كراوثر
- صمد بهرنجى
- جون أنتيس
- هانز جيورج جادامر
- باتريك بارندر
- مولانا جلال الدين الرومى
- محمد حسين هيكل
- مقالات
- جون لوك
- جيمس ب. كارس
- ك. مادهو بانيكار
- جان سوفاجيه - كلود كاين
- ديفيد روس
- أ. ج. هويكنز
- روجر آلن
- بول . ب . ديكسون
- ت : أحمد درويش
- ت : أحمد فؤاد بليغ
- ت : شوقى جلال
- ت : أحمد الحضرى
- ت : محمد علاء الدين منصور
- ت : سعد مصلوح / وفاء كامل فايد
- ت : يوسف الأنطكى
- ت : مصطفى ماهر
- ت : محمود محمد عاشور
- ت : محمد معتمد وعبد الجليل الأرنؤى وعمر طى
- ت : هناء عبد الفتاح
- ت : أحمد محمود
- ت : عبد الوهاب غلوب
- ت : حسن المودن
- ت : أشرف رفيق عفيفى
- ت : يإشراف: أحمد عثمان
- ت : محمد مصطفى بدوى
- ت : طلعت شاهين
- ت : نعيم عطية
- ت : يمنى طريف الخولى / بنوى عبد الفتاح
- ت : ماجدة العناني
- ت : سيد أحمد على الناصرى
- ت : سعيد توفيق
- ت : بكر عباس
- ت : إبراهيم الدسوقى شتا
- ت : أحمد محمد حسين هيكل
- ت : نخبة
- ت : منى أبو سنه
- ت : بدر الديب
- ت : أحمد فؤاد بليغ
- ت : عبد الستار الطوجى / عبد الوهاب غلوب
- ت : مصطفى إبراهيم فهمى
- ت : أحمد فؤاد بليغ
- ت : حصه إبراهيم المنيف
- ت : خليل كلفت

- ٢٦- نظريات السرد الحديثة
٢٧- واحة سيوة وموسيقاها
٢٨- نقد الحداثة
٢٩- الإغريق والحسد
٤٠- قصائد حب
٤١- ما بعد المركزية الأوروبية
٤٢- عالم ماك
٤٣- اللهب المزدوج
٤٤- بعد عدة أصياف
٤٥- التراث المغنور
٤٦- عشرون قصيدة حب
٤٧- تاريخ النقد الأدبي الحديث (١)
٤٨- حضارة مصر الفرعونية
٤٩- الإسلام في البلقان
٥٠- ألف ليلة وليلة أو القول الأسير
٥١- مسار الرواية الإسبانية أمريكية
٥٢- العلاج النفسي التديمي
٥٣- الدراما والتعليم
٥٤- المفهوم الإغريقي للمسرح
٥٥- ما وراء العلم
٥٦- الأعمال الشعرية الكاملة (١)
٥٧- الأعمال الشعرية الكاملة (٢)
٥٨- مسرحيتان
٥٩- المحبرة
٦٠- التصميم والشكل
٦١- موسوعة علم الإنسان
٦٢- لذة النص
٦٣- تاريخ النقد الأدبي الحديث (٢)
٦٤- برتراند راسل (سيرة حياة)
٦٥- في مدح الكسل ومقالات أخرى
٦٦- خمس مسرحيات أندلسية
٦٧- مختارات
٦٨- نتاشا العجوز وقصص أخرى
٦٩- العالم الإنساني في أول القرن العشرين
٧٠- ثقافة وحضارة أمريكا اللاتينية
٧١- السيدة لا تصلح إلا للرمي
- والاس مارتن
بريجيت شيفر
آلن تورين
بيتر والكوت
آن سكستون
بيتر جران
بنجامين باربر
أوكتاڤيو باث
ألدوس هكسلي
روبرت ج دنيا - جون ف أ فاين
بابلو نيرودا
رينيه ويليك
فرانسوا دوما
ه. ت. نوريس
جمال الدين بن الشيخ
داريو بيانوبيا وخ. م بينياليستي
بيتر. ن. نوفاليس وستيفن. ج.
روجسيفيتز وروجر بيل
أ. ف. ألنجلتون
ج. مايكل والتون
جون بولكنجهوم
فديريكو غرسية لوركا
فديريكو غرسية لوركا
فديريكو غرسية لوركا
كارلوس مونيث
جوفانز ايتين
شارلوت سيمور - سميث
رولان بارت
رينيه ويليك
آلان وود
برتراند راسل
أنطونيو جالا
فرناندو بيسوا
فالتين راسيوتين
عبد الرشيد إبراهيم
أوخينيو تشانج رودريجت
داريو فو
- ت : حياة جاسم محمد
ت : جمال عبد الرحيم
ت : أنور مغيث
ت : منيرة كروان
ت : محمد عيد إبراهيم
ت : عطف أحمد / إبراهيم قنحي / محمود ماجد
ت : أحمد محمود
ت : المهدي أخريف
ت : مارلين تاندرس
ت : أحمد محمود
ت : محمود السيد علي
ت : مجاهد عبد المنعم مجاهد
ت : ماهر جويجاتي
ت : عبد الوهاب علوب
ت : محمد برادة وعشائي الميلاوي ويوسف الأنطكي
ت : محمد أبو العطا
ت : لطفي فطيم وعادل دمرdash
ت : مرسى سعد الدين
ت : محسن مصليحي
ت : علي يوسف علي
ت : محمود علي مكي
ت : محمود السيد ، ماهر البطوطي
ت : محمد أبو العطا
ت : السيد السيد سهيم
ت : صبرى محمد عبد الغنى
مراجعة وإشراف : محمد الجوهري
ت : محمد خير البقاعي .
ت : مجاهد عبد المنعم مجاهد
ت : رمسيس عوض .
ت : رمسيس عوض .
ت : عبد اللطيف عبد الحليم
ت : المهدي أخريف
ت : أشرف الصباغ
ت : أحمد فؤاد متولي وهويدا محمد فهمي
ت : عبد الحميد غلاب وأحمد حشاد
ت : حسين محمود

- ٧٢- السياسي العجوز ت . س . إليوت
- ٧٣- نقد استجابة القارئ جين . ب . توميكنز
- ٧٤- صلاح الدين والمماليك فى مصر ل . ل . سيمينوفا
- ٧٥- فن التراجم والسير الذاتية أندريه موروا
- ٧٦- چاك لاكان وإغواء التحليل النفسى مجموعة من الكتاب
- ٧٧- تاريخ النقد الألبى الحديث ٣ رينيه ويليك
- ٧٨- العولة : النظرية الاجتماعية والثقافة الكونية رونالد رويرتسون
- ٧٩- شعرية التأليف بوريس أوسبنسكى
- ٨٠- بوشكين عند «نافورة الدموع» ألكسندر بوشكين
- ٨١- الجماعات المتخيلة بندكت أندرسن
- ٨٢- مسرح ميغيل ميغيل دى أونامونو
- ٨٣- مختارات غوتفريد بن
- ٨٤- موسوعة الأدب والنقد مجموعة من الكتاب
- ٨٥- منصور الحلاج (مسرحية) صلاح زكى أقطاى
- ٨٦- طول الليل جمال مير صادقى
- ٨٧- نون والقلم جلال آل أحمد
- ٨٨- الابتلاء بالغرب جلال آل أحمد
- ٨٩- الطريق الثالث أنتونى جينز
- ٩٠- وسم السيف ميغل دى ترباتس
- ٩١- المسرح والتجريب بين النظرية والتطبيق باربر الاسوستكا
- ٩٢- أساليب ومضامين المسرح
- ٩٣- الإشبانوأمرىكى المعاصر كارلوس ميغل
- ٩٤- محدثات العولة مايك فيذرستون وسكوت لاش
- ٩٥- الحب الأول والصحة صمويل بيكيت
- ٩٦- مختارات من المسرح الإشباني أنطونيو بويرو بايخو
- ٩٧- ثلاث زنبقات ووردة قصص مختارة
- ٩٨- هوية فرنسا مع ١ فرنان برودل
- ٩٩- الهم الإنسانى والابتزاز الصهيونى نماذج ومقالات
- ١٠٠- تاريخ السينما العالمية ديفيد روبنسون
- ١٠١- مسالة العولة بول ميرست وجراهام تومبسون
- ١٠٢- النص الروائى (تقنيات ومناهج) بيرنار فاليط
- ١٠٣- السياسة والتسامح عبد الكريم الخطيبى
- ١٠٤- قبر ابن عربى يليه آباء عبد الوهاب المؤدب
- ١٠٥- أوبرا ماهوجنى برتولت بريشت
- ١٠٦- مدخل إلى النص الجامع چيرارجينيت
- ١٠٧- الأدب الأندلسى د. ماريا خيسوس روبيرامتى
- ١٠٨- صورة الفنان فى الشعر الأمريكى المعاصر نخبة
- ت : فؤاد مجلى
- ت : حسن ناظم وعلى حاكم
- ت : حسن بيومى
- ت : أحمد درويش
- ت : عبد المقصود عبد الكريم
- ت : مجاهد عبد المنعم مجاهد
- ت : أحمد محمود ونورا أمين
- ت : سعيد الغانمى وناصر حلاوى
- ت : مكارم الغمرى
- ت : محمد طارق الشرقاوى
- ت : محمود السيد على
- ت : خالد المعالى
- ت : عبد الحميد شبيحة
- ت : عبد الرازق بركات
- ت : أحمد فتحي يوسف شتا
- ت : ماجدة العنانى
- ت : إبراهيم الدسوقى شتا
- ت : أحمد زايد ومحمد محبى الدين
- ت : محمد إبراهيم مبروك
- ت : محمد هناء عبد الفتاح
- ت : نادية جمال الدين
- ت : عبد الوهاب علوب
- ت : فوزية العشماوى
- ت : سرى محمد محمد عبد اللطيف
- ت : إدوار الخراط
- ت : بشير السباعى
- ت : أشرف الصباغ
- ت : إبراهيم قنديل
- ت : إبراهيم فتحى
- ت : رشيد بنخدو
- ت : عز الدين الكتانى الإدريسى
- ت : محمد بنيس
- ت : عبد الغفار مكاوى
- ت : عبد العزيز شبيب
- ت : د. أشرف على دعور
- ت : محمد عبد الله الجعيدى

١٠٨- ثلاث دراسات عن الشعر الأندلسي	مجموعة من النقاد	ت : محمود على مكي
١٠٩- حروب المياه	جون بولوك وعادل درويش	ت : هاشم أحمد محمد
١١٠- النساء في العالم النامي	حسنة بيجوم	ت : منى قطان
١١١- المرأة والجريمة	فرانسيس هيندسون	ت : ريهام حسين إبراهيم
١١٢- الاحتجاج الهادي	أرلين علوي ماركليود	ت : إكرام يوسف
١١٣- راية التمرد	سادي بلانت	ت : أحمد حسان
١١٤- مسرحيتا حصاد كونجى وسكان المستنق	وول شوينكا	ت : نسيم مجلى
١١٥- غرفة تخص المرء وحده	فرچينيا وولف	ت : سمية رمضان
١١٦- امرأة مختلفة (درية شفيق)	سينثيا نلسون	ت : نهاد أحمد سالم
١١٧- المرأة والجنوسة في الإسلام	ليلي أحمد	ت : منى إبراهيم ، وهالة كمال
١١٨- النهضة النسائية في مصر	بث بارون	ت : لميس النقاش
١١٩- النساء والأسرة وقوانين الطلاق	أميرة الأزهرى سنيل	ت : بإشراف/ رؤوف عباس
١٢٠- الحركة النسائية والتطور في الشرق الأوسط	ليلي أبو لغد	ت : نخبة من المترجمين
١٢١- الدليل الصغير عن الكتابات العربيات	فاطمة موسى	ت : محمد الجندي ، وإيزابيل كمال
١٢٢- نظام العبودية القديم ونموذج الإنسان	جوزيف فوجت	ت : منيرة كروان
١٢٣- الإمبراطورية العثمانية وعلاقاتها الدولية	نيل الكسندر وفنادولينا	ت : أنور محمد إبراهيم
١٢٤- الفجر الكاذب	جون جرائ	ت : أحمد فؤاد بلبع
١٢٥- التحليل الموسيقي	سيدريك ثورپ ديقى	ت : سمحه الخولى
١٢٦- فعل القراءة	ثولفانج إيسر	ت : عبد الوهاب علوب
١٢٧- إرهاب	صفاء فتحي	ت : بشير السباعي
١٢٨- الأدب المقارن	سوزان باسنيت	ت : أميرة حسن نويرة
١٢٩- الرواية الإسبانية المعاصرة	ماريا دولورس أسيس جاروته	ت : محمد أبو العطا وآخرون
١٣٠- الشرق يصعد ثانية	أندريه جوندرو فرانك	ت : شوقي جلال
١٣١- مصر القيمة (التاريخ الاجتماعي)	مجموعة من المؤلفين	ت : لويس بقطر
١٣٢- ثقافة العولمة	مايك فينرستون	ت : عبد الوهاب علوب
١٣٣- الخوف من المرايا	طارق على	ت : طلعت الشايب
١٣٤- تشريح حضارة	بارى ج. كيمب	ت : أحمد محمود
١٣٥- المختار من نقد ت. س. إليوت	ت. س. إليوت	ت : ماهر شفيق فريد
١٣٦- فلاحو الباشا	كينيث كرونو	ت : سحر توفيق
١٣٧- مذكرات ضابط في الحملة الفرنسية	جوزيف ماري مواريه	ت : كاميليا صبحي
١٣٨- عالم التليفزيون بين الجمال والعنف	إيقلينا تاروني	ت : وجيه سمعان عبد المسيح
١٣٩- باريسقال	ريشارد فاچنر	ت : مصطفى ماهر
١٤٠- حيث تلتقى الأنهار	هربرت ميسن	ت : أمل الجبوري
١٤١- اثنتا عشرة مسرحية يونانية	مجموعة من المؤلفين	ت : نعيم عطية
١٤٢- الإسكندرية : تاريخ ودليل	أ. م. فورستر	ت : حسن بيومي
١٤٣- قضايا التنظير في البحث الاجتماعي	ديريك لايدار	ت : عدلي السمري
١٤٤- صاحبة اللوكاندة	كارلو جولدوني	ت : سلامة محمد سليمان

- ١٤٥- موت أرتيميو كروث
١٤٦- الورقة الحمراء
١٤٧- خطبة الإدانة الطويلة
١٤٨- القصة القصيرة (النظرية والتقنية)
١٤٩- النظرية الشعرية عند إليوت وأندونيس
١٥٠- التجربة الإغريقية
١٥١- هوية فرنسا مع ٢ ، ج ١
١٥٢- عدالة الهنود وقصص أخرى
١٥٣- غرام الفراعة
١٥٤- مدرسة فرانكفورت
١٥٥- الشعر الأمريكي المعاصر
١٥٦- المدارس الجمالية الكبرى
١٥٧- خسرو وشيرين
١٥٨- هوية فرنسا مع ٢ ، ج ٢
١٥٩- الإيديولوجية
١٦٠- آلة الطبيعة
١٦١- من المسرح الإسباني
١٦٢- تاريخ الكنيسة
١٦٣- موسوعة علم الاجتماع
١٦٤- شامبوليون (حياة من نور)
١٦٥- حكايات الثعلب
١٦٦- العلاقات بين المتنبيين والعلمانيين في إسرائيل
١٦٧- في عالم طاغور
١٦٨- دراسات في الأدب والثقافة
١٦٩- إبداعات أدبية
١٧٠- الطريق
١٧١- وضع حد
١٧٢- حجر الشمس
١٧٣- معنى الجمال
١٧٤- صناعة الثقافة السوداء
١٧٥- التليفزيون في الحياة اليومية
١٧٦- نحو مفهوم للاقتصاديات البيئية
١٧٧- أنطون تشيخوف
١٧٨- مختارات من الشعر اليوناني الحديث
١٧٩- حكايات أيسوب
١٨٠- قصة جاويد
١٨١- النقد الأدبي الأمريكي
- كارلوس فوينتس
ميجيل دي ليبس
تاكريد دورست
إنريكي أندرسون إمبرت
عاطف فضول
روبرت ج. ليتمان
فرنان برودل
نخبة من الكتاب
فيولين فاتويك
فيل سليتر
نخبة من الشعراء
جى أنبال وآلان وأوديت فيرمو
النظامى الكتوجى
فرنان برودل
ديفيد هوكس
بول إيرليش
اليخاندرو كاسونا وأنطونيو جالا
يوجنا الأسويى
جوردن مارشال
جان لأكوتير
أ. ن أفانا سيفا
يشعياهو ليتمان
رابندراناث طاغور
مجموعة من المؤلفين
مجموعة من المبدعين
ميفيل دلبيس
فرانك بيجو
مختارات
ولتر ت. ستيس
ايليس كاشمور
لورينزو فيلشس
توم تيتنبرج
هنرى تروايا
نخبة من الشعراء
أيسوب
إسماعيل فصيح
فنسنت ب. ليتش
- ت : أحمد حسان
ت : على عبدالرؤوف البمبي
ت : عبدالغفار مكايى
ت : على إبراهيم على منوفى
ت : أسامة إسبر
ت : منيرة كروان
ت : بشير السباعي
ت : محمد محمد الخطابي
ت : فاطمة عبدالله محمود
ت : خليل كلفت
ت : أحمد مرسى
ت : مى التلمسانى
ت : عبدالعزيز بقوش
ت : بشير السباعي
ت : إبراهيم فتحى
ت : حسين بيومى
ت : زيدان عبدالحليم زيدان
ت : صلاح عبدالعزيز محجوب
ت : بإشراف: محمد الجوهري
ت : نبيل سعد
ت : سهير المصادفة
ت : محمد محمود أبو غدير
ت : شكرى محمد عياد
ت : شكرى محمد عياد
ت : شكرى محمد عياد
ت : بسام ياسين رشيد
ت : هدى حسين
ت : محمد محمد الخطابي
ت : إمام عبد الفتاح إمام
ت : أحمد محمود
ت : وجيه سمعان عبد المسيح
ت : جلال البنا
ت : حصه إبراهيم المنيف
ت : محمد حمدى إبراهيم
ت : إمام عبد الفتاح إمام
ت : سليم عبد الأمير حمدان
ت : محمد يحيى

- ١٨٢ - العنف والنبوة و . ب . بيتس
- ١٨٣ - جان كوكتو على شاشة السينما رينيه جيلسون
- ١٨٤ - القاهرة... حالة لا تنام هانز إيندورفر
- ١٨٥ - أسفار العهد القديم توماس تومسن
- ١٨٦ - معجم مصطلحات هيجل ميخائيل إينوود
- ١٨٧ - الأرضة بزرّج علوى
- ١٨٨ - موت الأدب الفين كرنان
- ١٨٩ - العمى والبصيرة پول دى مان
- ١٩٠ - محاورات كونفوشيوس كونفوشيوس
- ١٩١ - الكلام وأسمال الحاج أبو بكر إمام
- ١٩٢ - رحلة إبراهيم بك ج١ زين العابدين المراغى
- ١٩٣ - عامل النجم بيتر أبراهامز
- ١٩٤ - مختارات من النقد الأنجلو-أمريكي مجموعة من النقاد
- ١٩٥ - شتاء ٨٤ إسماعيل فصيح
- ١٩٦ - المهلة الأخيرة فالتين راسبوتين
- ١٩٧ - الفاروق شمس العلما شبللى النعمانى
- ١٩٨ - الاتصال الجماهيرى ادوين إمري وآخرون
- ١٩٩ - تاريخ يهود مصر فى الفترة العثمانية يعقوب لاندواى
- ٢٠٠ - ضحايا التنمية جيرمى سيبيروك
- ٢٠١ - الجانب الدينى للفلسفة جهزايا رويس
- ٢٠٢ - تاريخ النقد الأدبى الحديث ج٢ رينيه ويليك
- ٢٠٣ - الشعر والشاعرية أطفاف حسين حالى
- ٢٠٤ - تاريخ نقد العهد القديم زلمان شاراز
- ٢٠٥ - الجينات والشعوب واللغات لويجى لوقا كافاللى - سفورزا
- ٢٠٦ - الهولوية تصنع علماً جديداً جيمس جلايك
- ٢٠٧ - ليل إفريقي رامون خوتاسندير
- ٢٠٨ - شخصية العربى فى المسرح الإسرائيلى دان أوريان
- ٢٠٩ - السرد والمسرح مجموعة من المؤلفين
- ٢١٠ - مثنويات حكيم سنائى سنائى الفرنوى
- ٢١١ - فردينان دوسوسير جوناثان كلر
- ٢١٢ - قصص الأمير مرزيان مرزيان بن رستم بن شروين
- ٢١٣ - مصر منذ قديم نابليون حتى رحيل عبدالناصر ريمون فلاور
- ٢١٤ - قواعد جديدة للمنهج فى علم الاجتماع أنتونى جيندز
- ٢١٥ - سياحت نامه إبراهيم بك ج٢ زين العابدين المراغى
- ٢١٦ - جوانب أخرى من حياتهم مجموعة من المؤلفين
- ٢١٧ - مسرحيتان طليعيتان ص. بيكيت
- ٢١٨ - رايبولا خوليو كورتازان
- ت: ياسين طه حافظ
- ت: فتحى العشرى
- ت: دسوقي سعيد
- ت: عبد الوهاب علوب
- ت: إمام عبد الفتاح إمام
- ت: محمد علاء الدين منصور
- ت: بدر الديب
- ت: سعيد الغانمى
- ت: محسن سيد فرجاني
- ت: مصطفى حجازى السيد
- ت: محمود سلامة علوى
- ت: محمد عبد الواحد محمد
- ت: ماهر شفيق فريد
- ت: محمد علاء الدين منصور
- ت: أشرف الصباغ
- ت: جلال السعيد الحفناوى
- ت: إبراهيم سلامة إبراهيم
- ت: جمال أحمد الرفاعى وأحمد عبد اللطيف حماد
- ت: فخزى لبيب
- ت: أحمد الأنصارى
- ت: مجاهد عبد المنعم مجاهد
- ت: جلال السعيد الحفناوى
- ت: أحمد محمود هويدي
- ت: أحمد مستجير
- ت: على يوسف على
- ت: محمد أبو العطا عبد الرؤوف
- ت: محمد أحمد صالح
- ت: أشرف الصباغ
- ت: يوسف عبد الفتاح فرج
- ت: محمود حمدي عبد الغنى
- ت: يوسف عبد الفتاح فرج
- ت: سيد أحمد على الناصرى
- ت: محمد محمود محى الدين
- ت: محمود سلامة علوى
- ت: أشرف الصباغ
- ت: نادية البنهاوى
- ت: على إبراهيم على منوفى

٢١٩ بقايا اليوم	كازو ايشجورو	ت: طلعت الشايب
٢٢٠ الهيولية في الكون	باري باركر	ت: علي يوسف علي
٢٢١ شعرية كفافى	جريجورى جوزدانيس	ت: رفعت سلام
٢٢٢- فرانتز كافكا	رونالد جراى	ت: نسيم مجلى
٢٢٣- العلم فى مجتمع حر	بول فيرابنر	ت: السيد محمد نفادى
٢٢٤- دمار يوغسلافيا	برانكا ماجاس	ت: منى عبدالظاهر إبراهيم السيد
٢٢٥- حكاية غريق	جابريل جارتيا ماركث	ت: السيد عبدالظاهر السيد
٢٢٦- أرض المساء وقصائد أخرى	ديفيد هريت لورانس	ت: طاهر محمد علي البربري
٢٢٧- المسرح الإسباني في القرن السابع عشر	موسى مارديا ديف بوركى	ت: السيد عبدالظاهر عبدالله
٢٢٨- علم الجمالية وعلم اجتماع الفن	جانيت وولف	ت: ماري تيريز عبدالسيح وخالد حسن
٢٢٩- مأزق البطل الوحيد	نورمان كيغان	ت: أمير إبراهيم العمرى
٢٣٠- عن الذباب والفقران والبشر	فرانسواز جاكوب	ت: مصطفى إبراهيم فهمى
٢٣١- الدرافيل	خايمي سالوم بيدال	ت: جمال أحمد عبدالرحمن
٢٣٢- ما بعد المعلومات	توم ستينر	ت: مصطفى إبراهيم فهمى
٢٣٣- فكرة الاضمحلال	آرثر هومان	ت: طلعت الشايب
٢٣٤- الإسلام في السودان	ج. سينسر تريمنجهام	ت: فؤاد محمد عكود
٢٣٥- ديوان شمس تبريزى ج ١	جلال الدين مولوى رومى	ت: إبراهيم اللاسوقى شتا
٢٣٦- الولاية	ميشيل تود	ت: أحمد الطيب
٢٣٧- مصر أرض الوادى	روبين فيرين	ت: عنايات حسين طلعت
٢٣٨- العولة والتحرير	الانكتاد	ت: ياسر محمد جادالله وعربى مذبولى أحمد
٢٣٩- العربى فى الأدب الإسرائيلى	جيلرافر - رايوخ	ت: نادية سليمان حافظ وإيهاب صلاح فايق
٢٤٠- الإسلام والغرب وإمكانية الحوار	كامى حافظ	ت: صلاح عبدالعزيز محبوب
٢٤١- فى انتظار البرابرة	ج . م كويتز	ت: ابتسام عبدالله سعيد
٢٤٢- سبعة أنماط من الغموض	وليام إميسون	ت: صبرى محمد حسن عبدالنبي
٢٤٣- تاريخ إسبانيا الإسلامية ج١	ليفى بروفنسال	ت: على عبدالرؤوف اليمبى
٢٤٤- الغليان	لاورا إسكييل	ت: نادية جمال الدين محمد
٢٤٥- نساء مقاتلات	إليزابيتا أديس	ت: توفيق على منصور
٢٤٦- مختارات قصصية	جابريل جارتيا ماركث	ت: على إبراهيم على منوفى
٢٤٧- الثقافة الجماهيرية والحداثة فى مصر	والتر إرميرست	ت: محمد طارق الشرقاوى
٢٤٨- حقول عدن الخضراء	أنطونيو جالا	ت: عبداللطيف عبدالحليم عبدالله
٢٤٩- لغة التمزق	دراجو شتامبوك	ت: رفعت سلام
٢٥٠- علم اجتماع العلوم	دومنيك فينيك	ت: ماجدة محسن أباطة
٢٥١- موسوعة علم الاجتماع (ج٢)	جوردن مارشال	ت: بإشراف: محمد الجوهري
٢٥٢- رائدات الحركة النسوية المصرية	مارجو بدران	ت: على بدران
٢٥٣- تاريخ مصر الفاطمية	ل. أ. سيمينوفا	ت: حسن بيومى
٢٥٤- الفلسفة	ديف روينسون وجودى جروفز	ت: إمام عبد الفتاح إمام
٢٥٥- أفلاطون	ديف روينسون وجودى جروفز	ت: إمام عبد الفتاح إمام

- ٢٥٦- ديكرات
٢٥٧- تاريخ الفلسفة الحديثة
٢٥٨- الفجر
٢٥٩- مختارات من الشعر الأرمني عبر العصور
٢٦٠- موسوعة علم الاجتماع ج٣
٢٦١- رحلة في فكر زكي نجيب محمود
٢٦٢- مدينة المعجزات
٢٦٣- الكشف عن حافة الزمن
٢٦٤- إبداعات شعرية مترجمة
٢٦٥- روايات مترجمة
٢٦٦- مدير المدرسة
٢٦٧- فن الرواية
٢٦٨- ديوان شمس تبریزی ج٢
٢٦٩- وسط الجزيرة العربية وشرقها ج١
٢٧٠- وسط الجزيرة العربية وشرقها ج٢
٢٧١- الحضارة الغربية
٢٧٢- الأديرة الأثرية في مصر
٢٧٣- الاستعمار والثورة في الشرق الأوسط
٢٧٤- السيدة باربارا
٢٧٥- ت. س إليوت شاعرا وناقدا وكاتب مسرحيا
٢٧٦- فنون السينما
٢٧٧- الجينات: الصراع من أجل الحياة
٢٧٨- البدايات
٢٧٩- الحرب الباردة الثقافية
٢٨٠- من الأدب الهندي الحديث والمعاصر
٢٨١- الفردوس الأعلى
٢٨٢- طبيعة العلم غير الطبيعية
٢٨٣- السهل يحترق
٢٨٤- هرقل مجنوننا
٢٨٥- رحلة الخواجة حسن نظامي
٢٨٦- رحلة إبراهيم بك ج٢
٢٨٧- الثقافة والعولمة والنظام العالمي
٢٨٨- الفن الروائي
٢٨٩- ديوان منجوهري الدامغاني
٢٩٠- علم اللغة والترجمة
٢٩١- المسرح الإسباني في القرن العشرين ج١
٢٩٢- المسرح الإسباني في القرن العشرين ج٢
- ديف روينسون ، كريس جرات
وليم كلي رايت
سير أنجوس فريزر
أقلام مختلفة
جوردن مارشال
زكي نجيب محمود
إدوارد مندوثا
جون جرين
هوراس/ شلي
أوسكار وايلد وصموئيل جونسون
جلال آل أحمد
ديفيد لودج
جلال الدين الرومي
وليم جيفور بالجريف
وليم جيفور بالجريف
توماس سي. باترسون
س. س والترز
جوان آر. لوك
رومولو جلاجوس
أقلام مختلفة
فرايك جوتيران
بريان فورد
إسحق عظيموف
ف.س. سوندرز
بريم شند وآخرون
مولانا عبد الحليم شرر الكهنوي
لويس وليبرت
خوان رولفو
يوريبيدس
حسن نظامي
زين العابدين المراغي
انتوني كنج
ديفيد لودج
أبو نجم أحمد بن قوص
جورج مونا
فرانشيسكو رويس رامون
فرانشيسكو رويس رامون
- ت: إمام عبد الفتاح إمام
ت: محمود سيد أحمد
ت: عبادة كحيلة
ت: فاروجان كازانجيان
ت: باشراف: محمد الجوهري
ت: إمام عبد الفتاح إمام
ت: محمد أبو العطا عبد الرؤوف
ت: علي يوسف علي
ت: لويس عوض
ت: لويس عوض
ت: عادل عبدالمنعم سويلم
ت: ماهر البطوطي
ت: إبراهيم الدسوقي شتا
ت: صبري محمد حسن
ت: صبري محمد حسن
ت: شوقي جلال
ت: إبراهيم سلامة
ت: عنان الشهاوي
ت: محمود مكي
ت: ماهر شفيق فريد
ت: عبد القادر التلمساني
ت: أحمد فوزي
ت: ظريف عبدالله
ت: طلعت الشايب
ت: سمير عبدالحميد
ت: جلال الحفناوي
ت: سمير حنا صادق
ت: علي البمبي
ت: أحمد عثمان
ت: سمير عبد الحميد
ت: محمود سلامة علاوي
ت: محمد يحيى وآخرون
ت: ماهر البطوطي
ت: محمد نور الدين عبدالمنعم
ت: أحمد زكريا إبراهيم
ت: السيد عبد الظاهر
ت: السيد عبد الظاهر

٢٩٣- مقدمة للأدب العربي	روجر آلان	ت: نخبة من المترجمين
٢٩٤- فن الشعر	بوالو	ت: رجا ياقوت صالح
٢٩٥- سلطان الأسطورة	جوزيف كامبل	ت: بدر الدين حب الله الديب
٢٩٦- مكبث	وليم شكسبير	ت: محمد مصطفى بدوي
٢٩٧- فن النحو بين اليونانية والسريانية	ديونيسيوس ثراكس - يوسف الأمواني	ت: ماجدة محمد أنور
٢٩٨- مأساة العبيد	أبو بكر ثقوالبليوه	ت: مصطفى حجازي السيد
٢٩٩- ثورة التكنولوجيا الحيوية	جين ل. ماركس	ت: هاشم أحمد فؤاد
٣٠٠- أسطورة برومئوس مج١	لويس عوض	ت: جمال الجزيري وبياء چاهين
٣٠١- أسطورة برومئوس مج٢	لويس عوض	ت: جمال الجزيري و محمد الجندي
٣٠٢- فنجنشتين	جون هيتون وجودي جروفز	ت: إمام عبد الفتاح إمام
٣٠٣- بوذا	جين هوب وبورن فان لون	ت: إمام عبد الفتاح إمام
٣٠٤- ماركس	ريوس	ت: إمام عبد الفتاح إمام
٣٠٥- الجلد	كروزيو مالابارته	ت: صلاح عبد الصبور
٣٠٦- الحماسة - النقد الكانطي للتاريخ	چان - فرانسوا ليوتار	ت: نبيل سعد
٣٠٧- الشعور	ديفيد بابينو	ت: محمود محمد أحمد
٣٠٨- علم الوراثة	ستيف جونز	ت: ممدوح عبد المنعم أحمد
٣٠٩- الذهن والمخ	أنجوس چيلاتي	ت: جمال الجزيري
٣١٠- يونج	ناجي هيد	ت: محبي الدين محمد حسن
٣١١- مقال في المنهج الفلسفي	كولنجوود	ت: فاطمة إسماعيل
٣١٢- روح الشعب الأسود	وليم دي بوز	ت: أسعد حليم
٣١٣- أمثال فلسطينية	خاير بيان	ت: عبدالله الجعدي
٣١٤- الفن كعدم	جينس مينك	ت: هويدا السباعي
٣١٥- جرامشي في العالم العربي	ميشيل بروندينو	ت: كاميليا صبحي
٣١٦- محاكمة سقراط	آ.ف. ستون	ت: نسيم مجلي
٣١٧- بلا غد	شير لايموفا- زنيكين	ت: أشرف الصباغ
٣١٨- الأدب الروسي في السنوات العشر الأخيرة	نخبة	ت: أشرف الصباغ
٣١٩- صور دريدا	جايتير ياسبيفاك وكريستوفر نوريس	ت: حسام نايل
٣٢٠- لمعة السراج في حضرة التاج	محمد روشن	ت: محمد علاء الدين منصور
٣٢١- تاريخ إسبانيا الإسلامية ج٢	ليفى برو فنسال	ت: نخبة من المترجمين
٣٢٢- وجهات غربية حديثة في تاريخ الفن	دبليو يوجين كلينباور	ت: خالد مفلح حمزه
٣٢٣- فن الساتورا	تراث يوناني قديم	ت: هانم سليمان
٣٢٤- اللعب بالنار	أشرف أسدي	ت: محمود سلامة علاوي
٣٢٥- عالم الآثار	فيليب بوسان	ت: كريستين يوسف
٣٢٦- المعرفة والمصلحة	جورجين هابرماس	ت: حسن صقر
٣٢٧- مختارات شعرية مترجمة	نخبة	ت: توفيق علي منصور
٣٢٨- يوسف وزليخا	نور الدين عبد الرحمن بن أحمد	ت: عبد العزيز بقوش
٣٢٩- رسائل عيد الميلاد	تد هيوز	ت: محمد عيد إبراهيم
٣٣٠- كل شيء عن التمثيل الصامت	مارفن شبرد	ت: سامي صلاح

- ٢٣١- عندما جاء السردى
٢٣٢- القصة القصيرة فى إسبانيا
٢٣٣- الإسلام فى بريطانيا
٢٣٤- لقطات من المستقبل
٢٣٥- عصر الشك
٢٣٦- متون الأهرام
٢٣٧- فلسفة الولاء
٢٣٨- قصص قصيرة من الهند
٢٣٩- تاريخ الأدب فى إيران ج٢
٢٤٠- اضطراب فى الشرق الأوسط
٢٤١- قصائد من رلكه
٢٤٢- سلمان وأبسال
٢٤٣- العالم البرجوازي الزائل
٢٤٤- الموت فى الشمس
٢٤٥- الركض خلف الزمن
٢٤٦- سحر مصر
٢٤٧- الصبية الطائشون
٢٤٨- المتصوفة الأولون فى الأدب التركى ج١
٢٤٩- دليل القارئ إلى الثقافة الجادة
٢٥٠- بانوراما الحياة السياحية
٢٥١- مبادئ المنطق
٢٥٢- قصائد من كفافيس
٢٥٣- الفن الإسلامى فى الأندلس (الزخرفة الهندسية)
٢٥٤- الفن الإسلامى فى الأندلس (الزخرفة النباتية)
٢٥٥- التيارات السياسية فى إيران
٢٥٦- الميراث المر
٢٥٧- متون هيرميس
٢٥٨- أمثال الهوسا العامة
٢٥٩- محاورات بارمنديس
٢٦٠- أنثروبولوجيا اللغة
٢٦١- التصحر: التهديد والمجابهة
٢٦٢- تلميذ بابنبرج
٢٦٣- حركات التحرر الأفريقى
٢٦٤- حادثة شكسبير
٢٦٥- سام باريس
٢٦٦- نساء يركضن مع الذئاب
٢٦٧- القلم الجرىء
٢٦٨- المصطلح السردى
ستيفن جراى
نخبة
نبيل مطر
أرثر س كلارك
ناتالى ساروت
نصوص قديمة
جوزايا رويس
نخبة
على أصغر حكمت
بيرش بيربيروجلو
راينر ماريا رلكه
نور الدين عبد الرحمن بن أحمد
نادين جورديمر
بيتر بلانجوه
بونه ندائى
رشاد رشدى
جان كوكتو
محمد فؤاد كوبرلى
آرثر والدرون وآخرون
أقلام مختلفة
جوزايا رويس
قسطنطين كفافيس
باسيليو بابون مالدوناند
باسيليو بابون مالدوناند
حجت مرتضى
بول سالم
نصوص قديمة
نخبة
أقلاطون
أندريه جاكوب ونويلا باركان
آلان جرينجر
هاينرش شيبورال
ريتشارد جيبسون
إسماعيل سراج الدين
شارل بودليير
كلاريسا بنكولا
نخبة
جيرالد برنس
ت: سامية دياب
ت: على إبراهيم على منوفى
ت: بكر عباس
ت: مصطفى فهمى
ت: فتحى العشرى
ت: حسن صابر
ت: أحمد الأنصارى
ت: جلال السعيد الحفناوى
ت: محمد علاء الدين منصور
ت: فخرى لبيب
ت: حسن حلمى
ت: عبد العزيز بقوش
ت: سمير عبد ربه
ت: سمير عبد ربه
ت: يوسف عبد الفتاح فرج
ت: جمال الجزيرى
ت: بكر الطو
ت: عبدالله أحمد إبراهيم
ت: أحمد عمر شاهين
ت: عطية شحاتة
ت: أحمد الانصارى
ت: نعيم عطية
ت: على إبراهيم على منوفى
ت: على إبراهيم على منوفى
ت: محمود سلامة علاوى
ت: بدر الرفاعى
ت: عمر الفاروق عمر
ت: مصطفى حجازى السيد
ت: حبيب الشارونى
ت: لىلى الشربينى
ت: عاطف معتمد وأمال شاور
ت: سيد أحمد فتح الله
ت: صبرى محمد حسن
ت: نجلاء أبو عجاج
ت: محمد أحمد حمد
ت: مصطفى محمود محمد
ت: البراق عبدالهادى رضا
ت: عابد خزندار

٢٦٩- المرأة فى أدب نجيب محفوظ	فوزية العشماوى
٢٧٠- الفن والحياة فى مصر الفرعونية	كلير لا لويت
٢٧١- المتصوفة الأولون فى الأدب التركى ج ٢	محمد فؤاد كوبريلى
٢٧٢- عاش الشباب	وانغ مينغ
٢٧٣- كيف تعد رسالة دكتوراه	أميرتو إيكو
٢٧٤- اليوم السادس	أندريه شديد
٢٧٥- الخلود	ميلان كونديرا
٢٧٦- الغضب وأحلام السنين	نخبة
٢٧٧- تاريخ الأدب فى إيران ج ٤	على أصغر حكمت
٢٧٨- المسافر	محمد إقبال
٢٧٩- ملك فى الحديقة	سنيل باث
٢٨٠- حديث عن الخسارة	جوتتر جراس
٢٨١- أساسيات اللغة	ر.ل. تراسك
٢٨٢- تاريخ طبرستان	بهاء الدين محمد إسفنديار
٢٨٣- هدية الحجاز	محمد إقبال
٢٨٤- القصص التى يحكيها الأطفال	سوزان إنجيل
٢٨٥- مشترى العشق	محمد على بهزادراد
٢٨٦- دفاعاً عن التاريخ الأدبى النسوى	جانيت تود
٢٨٧- أغنيات وسوناتات	چون دن
٢٨٨- مواعظ سعدى الشيرازى	سعدى الشيرازى
٢٨٩- من الأدب الباكستانى المعاصر	نخبة
٢٩٠- الأرشيفات والمدن الكبرى	نخبة
٢٩١- الحافلة الليككية	مايف بينشى
٢٩٢- مقامات ورسائل أندلسية	نخبة
٢٩٣- فى قلب الشرق	ندوة لويس ماسينيون
٢٩٤- القوى الأساسية الأربع فى الكون	بول ديفيز
٢٩٥- آلام سياوش	إسماعيل فصيح
٢٩٦- السافاك	تقى نجارى راد
٢٩٧- نيتشه	لورانس جين
٢٩٨- سارتر	فيليب تودى
٢٩٩- كامى	ديفيد ميروفتس
٤٠٠- مومو	مشيائيل إنده
٤٠١- الرياضيات	زيادون ساردر
٢٦٩- فوزية العشماوى	ت: فوزية العشماوى
٢٧٠- فاطمة عبدالله محمود	ت: فاطمة عبدالله محمود
٢٧١- عبدالله أحمد إبراهيم	ت: عبدالله أحمد إبراهيم
٢٧٢- وحيد السعيد عبدالحميد	ت: وحيد السعيد عبدالحميد
٢٧٣- على إبراهيم على منوفى	ت: على إبراهيم على منوفى
٢٧٤- حمادة إبراهيم	ت: حمادة إبراهيم
٢٧٥- خالد أبو اليزيد	ت: خالد أبو اليزيد
٢٧٦- إدوار الخراط	ت: إدوار الخراط
٢٧٧- محمد علاء الدين منصور	ت: محمد علاء الدين منصور
٢٧٨- يوسف عبدالفتاح فرج	ت: يوسف عبدالفتاح فرج
٢٧٩- جمال عبدالرحمن	ت: جمال عبدالرحمن
٢٨٠- شيرين عبدالسلام	ت: شيرين عبدالسلام
٢٨١- رانيا إبراهيم يوسف	ت: رانيا إبراهيم يوسف
٢٨٢- أحمد محمد نادى	ت: أحمد محمد نادى
٢٨٣- سمير عبدالحميد إبراهيم	ت: سمير عبدالحميد إبراهيم
٢٨٤- إيزابيل كمال	ت: إيزابيل كمال
٢٨٥- يوسف عبدالفتاح فرج	ت: يوسف عبدالفتاح فرج
٢٨٦- ريهام حسين إبراهيم	ت: ريهام حسين إبراهيم
٢٨٧- بهاء جاهين	ت: بهاء جاهين
٢٨٨- محمد علاء الدين منصور	ت: محمد علاء الدين منصور
٢٨٩- سمير عبدالحميد إبراهيم	ت: سمير عبدالحميد إبراهيم
٢٩٠- عثمان مصطفى عثمان	ت: عثمان مصطفى عثمان
٢٩١- منى الدروبي	ت: منى الدروبي
٢٩٢- عبداللطيف عبدالحليم	ت: عبداللطيف عبدالحليم
٢٩٣- نخبة	ت: نخبة
٢٩٤- هاشم أحمد محمد	ت: هاشم أحمد محمد
٢٩٥- سليم حمدان	ت: سليم حمدان
٢٩٦- محمود سلامة علاوى	ت: محمود سلامة علاوى
٢٩٧- إمام عبدالفتاح إمام	ت: إمام عبدالفتاح إمام
٢٩٨- إمام عبدالفتاح إمام	ت: إمام عبدالفتاح إمام
٢٩٩- إمام عبدالفتاح إمام	ت: إمام عبدالفتاح إمام
٤٠٠- باهر الجوهري	ت: باهر الجوهري
٤٠١- ممدوح عبد المنعم	ت: ممدوح عبد المنعم

التنفيذ والطباعة: Stampa

١١ ميدان سفتكس - المهندسين

تليفون: 3448824 - 3034408